مديرية التربية لولاية تيسمسيلت | ثانوية: عبد الرحمان ابن خلدون

المستوى: 3 ع ت | يوم 15 – 05 – 2017 | المدة: 3 ساعات ونصف

بكالوريا تجريبي في مادة: الرياضيات

الموضوع الاول

التمرين الأول(04):

الفضاء منسوب الى متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;2;2)$، $B(1;0;1)$، $C(3;2;1)$ من الفضاء و المستوي(P) الذي معادلته $z=1$ والنقطةD هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي(P) و(Δ) هو المستقيم المعرف بتمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=-3+t\\y=-4-t\\z=1\end{cases}\ ;t\epsilon\mathbb{R}$

و(S) هو السطح الكروي المعرف بالمعادلة: $x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z=0$

من بين الاجوبة المقترحة ، اختر الجواب الصحيح مع التبرير:

	(ا)	(ب)	(ج)	(د)
1) تمثيل وسيطي لـ (B)هو	$\begin{cases}x=1+2k\\y=2+k\\z=-3k\end{cases};k\epsilon\mathbb{R}$	$\begin{cases}x=-1+k\\y=2+k\\z=-3k\end{cases};k\epsilon\mathbb{R}$	$\begin{cases}x=1-2k\\y=2k\\z=1\end{cases};k\epsilon\mathbb{R}$	$\begin{cases}x=1+2k\\y=2k\\z=3\end{cases};k\epsilon\mathbb{R}$
2) المستقيمان (Δ)و(BC)	متوازيات تماما	منطبقان	متقاطعان	ليسا من نفس المستوى
3)المستقيم (BC)	محتوى في المستوي (P)	يقطع المستوي (P)	لايوازي المستوي (P)	عمودي على المستوي (P)
4)احداثيات النقطة Dهي	$(1;2;-1)$	$(1;1;2)$	$(1;2;1)$	$(1;2;0)$
5)السطح الكروي (S):	يشمل النقطة A	يقطعه المستوي (P)	لايقطعه المستوي (P)	مركزه ينتمي الى المستوي (P)

التمرين الثاني(04):

لتكن (u_n)المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n=\int_n^{n+1}e^{2-x}dx$

1. احسب u_0ثم اثبت مستعملا مبدا الاستدلال بالتراجع ، انه من اجل كل عدد طبيعيn : $u_n>0$
2. احسب u_n بدلالة n ، وبرهن ان المتتالية(u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول
3. ا) احسب بدلالة n الفرق$u_{n+1}-u_n$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)
   ب) استنتج ان المتتالية(u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{n\to+\infty}u_n$
4. نضع ، من اجل كل عدد طبيعيn : $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$
   احسب بدلالة n المجموعS_n ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty}S_n$



التمرين الثالث(05):

المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس$(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن النقطA، B وC التي لواحقها على الترتيب: $z_A=1+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$، $z_C=4$

1. ا) اكتب الاعداد z_A،z_Bو$\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل المثلثي ، ثم استنتج الشكل الاسي
   ب) اكتب العدد المركب$\frac{z_A}{z_B}$ على شكله الجبري ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

2. اوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1}{8}(1-\sqrt{3}i)$، احسب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8$

3. ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}z$

   - حدد طبيعة التحويل النقطي S وعناصره المميزة

4. ا) اوجد المجموعة (Γ_1) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق $z = z_C + 2e^{i\theta}$ لما θ تمسح $\mathbb{R}$

   ب) اوجد المجموعة (Γ_2) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق : $Arg(z - z_C) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k\epsilon\mathbb{Z}$

5. اوجد صورة (Γ_1) بالتحويل النقطي S، استنتج مساحتها.

التمرين الرابع(07):

1) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 2 - x^2e^{1-x}$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث : $||\vec{i}|| = 2cm$ و $||\vec{j}|| = 1cm$

ا) احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب) بين ان $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ وفسر النتيجة هندسيا

2) ا) اثبت انه من اجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = (x^2 - 2x)e^{1-x}$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f

ج) عين معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

3) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = 1 - xe^{1-x}$

ا) ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x ، $h(x) \geq 0$

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ المماس (T)

4) بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1 < \alpha < 0$

5) انشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $]-\infty; 1]$

6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $x^2e^{1-x} = -m$

7) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$

   - تحقق ان F دالة اصلية للدالة f
   - بين ان $\int_1^2 f(x)dx = -3 + 10e^{-1}$

مديرية التربية لولاية تيسمسيلت — ثانوية: عبد الرحمان ابن خلدون

المستوى: 3 ع ت — يوم 15 – 05 – 2017 — المدة: 3 ساعات ونصف

بكالوريا تجريبي في مادة: الرياضيات

الموضوع الثاني

التمرين الأول(04):

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. (D_1) و (D_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بمعادلاتهما :

$(D_1): \frac{x-2}{3} = -y-1 = z-3$ و $(D_2): x+1 = \frac{y}{2} = 2-z$

1. اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من(D_1) و (D_2)
2. بين ان (D_1)و (D_2) يتقاطعان في نقطةA يطلب تعيين احداثياتها
3. اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)الذي يحوي المستقيمين (D_1)و (D_2)
4. (S)سطح كرة تتقاطع من المستويين الذين معادلاتهما $z=0$ ، $y=0$ على الترتيب وفق الدائرتين المعرفتين بـ:

$\begin{cases}(x-2)^2+(y+2)^2=13\\ z=0\end{cases}$ ، $\begin{cases}(x-2)^2+(z+1)^2=10\\ y=0\end{cases}$

عين الوضع النسبي لـ(S) و (P)

التمرين الثاني(05):

1) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة$\mathbb{C}$ كثير الحدود P الذي متغيره z حيث : $P(z) = z^3-4z^2+6z-4$

ا) بين ان المعادلة $P(z)=0$ لاتقبل حلا تخيليا صرفا

ب) عين العددين الحقيقيينa ، b حيث : $P(z) = (z-2)(z^2+az+b)$

ج) حل في$\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$

2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس$(O;\vec{u};\vec{v})$ ، الوحدة $\|\vec{u}\| = 2cm$ نعتبر النقط A، B، C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 2$ ، $z_B = 1-i$ ، $z_C = 1+i$

ا) اكتب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الجبري ، استنتج طبيعة المثلث ABC

ب) اكتب z_B وz_C على الشكل الاسي

ج) تحقق ان : $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1437} + \sqrt{2}\left(\frac{z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = \frac{\sqrt{2}}{2}z_C$

3) ليكن R الدوران الذي مركزه A ويحولB الى C

ا) عينθ زاوية الدوران R

ب) اكتب العبارة المركبة للدوران R ، ثم عين لاحقة النقطة D صورة النقطةC بالدوران R

4) لتكن(ϕ) الدائرة التي قطرها $[BC]$ومركزها النقطة Iو (ϕ') صورتها بالدوران R

انشئ بعناية كلا من الدائرتين (ϕ)و (ϕ')

التمرين الثالث(04):

في الشكل المرفق (C_f)هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال$]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{x}{ln(x)}$والمستقيم(d) ذو المعادلة $y=x$. نعتبر المتتالية العددية(u_n) المعرفة على$\mathbb{N}$ بـ: $u_0=5$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

1. باستعمال التمثيل البياني للدالةf ، مثل على محور الفواصل الحدود u_0،u_1،u_2،u_4 . و اعط تخمينا حول سلوك المتتالية (u_n)
2. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعيn : $u_n \geq e$
3. ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثم استنتج انها متقاربة نحو عدد حقيقيl من المجال $[e;+\infty[$
4. لحساب نهاية المتتالية (u_n) اثبت ان: $f(l)=l$ ثم استنتج قيمة l

التمرين الرابع(07):

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال$]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1-\ln x$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها
2) استنتج اشارة$g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ثم استنتج انه من اجل $x\epsilon]0;+\infty[$ ، $\ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{x}{2}-1 \; .... (*)$

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال$]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x^2-2-2x\ln x$ و $f(0)=-2$

نسمي(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) ا) احسب نهاية الدالةf عند0 وماذا تستنتج ؟

ب) احسب $\lim_{x\to0}\frac{f(x)+2}{x}$ ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f وبالنسبة للمنحنى(C_f) ؟

ج) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

2) ا) بين ان الدالةf قابلة للاشتقاق على المجال$]0;+\infty[$ وان $f'(x)=2g(x)$

ب) استنتج اشارة$f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالةf. ثم استنتج نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

3) بين ان المعادلة $f(x)=0$تقبل حلا وحيدا αعلى المجال $]2;3[$

4) ا) بين ان معادلة المماس(Δ) للمنحنى(C_f) عند النقطة التي فاصلتها2 هي $y=2(1-\ln 2)x-2$

ب) باستعمال العلاقة$(*)$ حدد الوضع النسبي للمنحنى(C_f) والمستقيم (Δ)

5) ارسم كل من (Δ)و (C_f)

6) ا) احسب مشتق الدالة $x\mapsto\frac{x^2}{2}(2\ln x-1)$على المجال$]0;+\infty[$. استنتج دالة اصليةF للدالة f

ب) λ عدد حقيقي موجب تماما ، احسب $A(\lambda)$مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f)والمستقيمات التي معادلاتها$y=0$ ، $x=\lambda$و$x=2$ ثم احسب $\lim_{x\to0}A(\lambda)$

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبي الاول ثالثة علـــــوم تجريبية

السؤال	الجواب	التعليل	التنقيط
1)		الجملة $\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 2k \quad ; k\epsilon\mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم(BC) لان احداثياتB تحقق الجملة اي $k = 0$ واحداثياتC تحقق ايضا الجملة اي$k = 1$	0.75
2)		المستقيمان و متقاطعان لان شعاعي التوجيه غير مرتبطين خطيا و $\begin{cases} -3 + t = 1 + 2k \\ -4 - t = 2k \\ 1 = 1 \end{cases}$ أي $\begin{cases} t = 0 \\ k = -2 \end{cases}$ و $M(-3; -4; 1)\epsilon(\Delta) \cap (BC)$	01
3)		المستقيمBC محتوى في (P) لان$B\epsilon(P)$ ،$1 = 1$ و$C\epsilon(P)$ ، $1 = 1$	0.75
4)		احداثيات النقطةD هي$(1; 2; 1)$ لانها تحقق معادلة(P) اي $1 = 1$	0.75
5)		(P) يقطع سطح الكرة (S) لان $\omega(1; 2; 2)$ هي مركز (S)ونصف قطرها $R = 3$ و $d(\omega; (P)) = 1$ و $d < R$	0.75

التنقيط	التصحيـــــح المفصل

التمرين 02 :

1) حساب u_0ثم البرهان بالتراجع ان: $u_n > 0$

: حساب u_0 **(0.25)**

$$u_0 = \int_0^1 e^{2-x}dx = -\left[e^{2-x}\right]_0^1 = e^2 - e$$

نضع $P(n)$: $u_n > 0$

المرحلة 01 : من اجل $n = 0$ نجد$u_0 = e^2 - e$ ومنه $u_0 > 0$

وعليه $P(0)$محققة

المرحلة 02 : من اجل عدد طبيعي n، نفرض صحة $P(n)$ونبرهن صحة $P(n + 1)$ **(0.75)**

لدينا : $u_{n+1} = \int_{n+1}^{n+2} e^{2-x}$ وبوضع $x = t + 1$ نجد

$u_{n+1} = \int_n^{n+1} e^{2-(t+1)}$ ومنه نجد $t = x - 1$

ومنه: $u_{n+1} = \int_n^{n+1} e^{2-t} \times e^{-1}dt$ وعليه نجد

$u_{n+1} = e^{-1} \underbrace{\int_n^{n+1} e^{2-t}dt}_{>0}$ ومنه نجد : $u_{n+1} > 0$ وعليه

$P(n + 1)$ محققة . من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$

2) حساب u_n بدلالة n : **(0.25)**

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x}dx = -\left[e^{2-x}\right]_n^{n+1} = (e - 1)e^{1-n}$$

3) اثبات ان (u_n) متتالية هندسية :

من اجل كل عدد طبيعي n : **(0.5)**

$$u_{n+1} = (e - 1)e^{1-(n+1)} = \frac{1}{e} \times u_n$$

اذن (u_n)متتالية هندسية اساسها$q = \frac{1}{e}$ وحدها الاول **(0.25)**

$u_0 = e^2 - e$

4) ا) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$ **(0.5)**

$u_{n+1} - u_n = (e - 1)e^{-n} - (e - 1)e^{1-n}$

$(e - 1)e^{-n}(1 - e) = -(e - 1)^2e^{-n}$

نلاحظ : $u_{n+1} - u_n < 0$ وعليه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

ب) استنتاج ان (u_n) متقاربة :

بما ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بالعدد 0 فهي متقاربة **(0.25)**

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(e - 1)e^{1-n} = 0$ **(0.25)**

5) حساب S_n :

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = e^2\left(1 - \frac{1}{e^{n+1}}\right)$ **(0.5)**

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} e^2\left(1 - \frac{1}{e^{n+1}}\right) = e^2$ **(0.25)**

التمرين 03 :

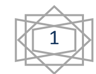
1. ا) كتابة z_A،z_Bو$\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل المثلثي واستنتاج الشكل الاسي

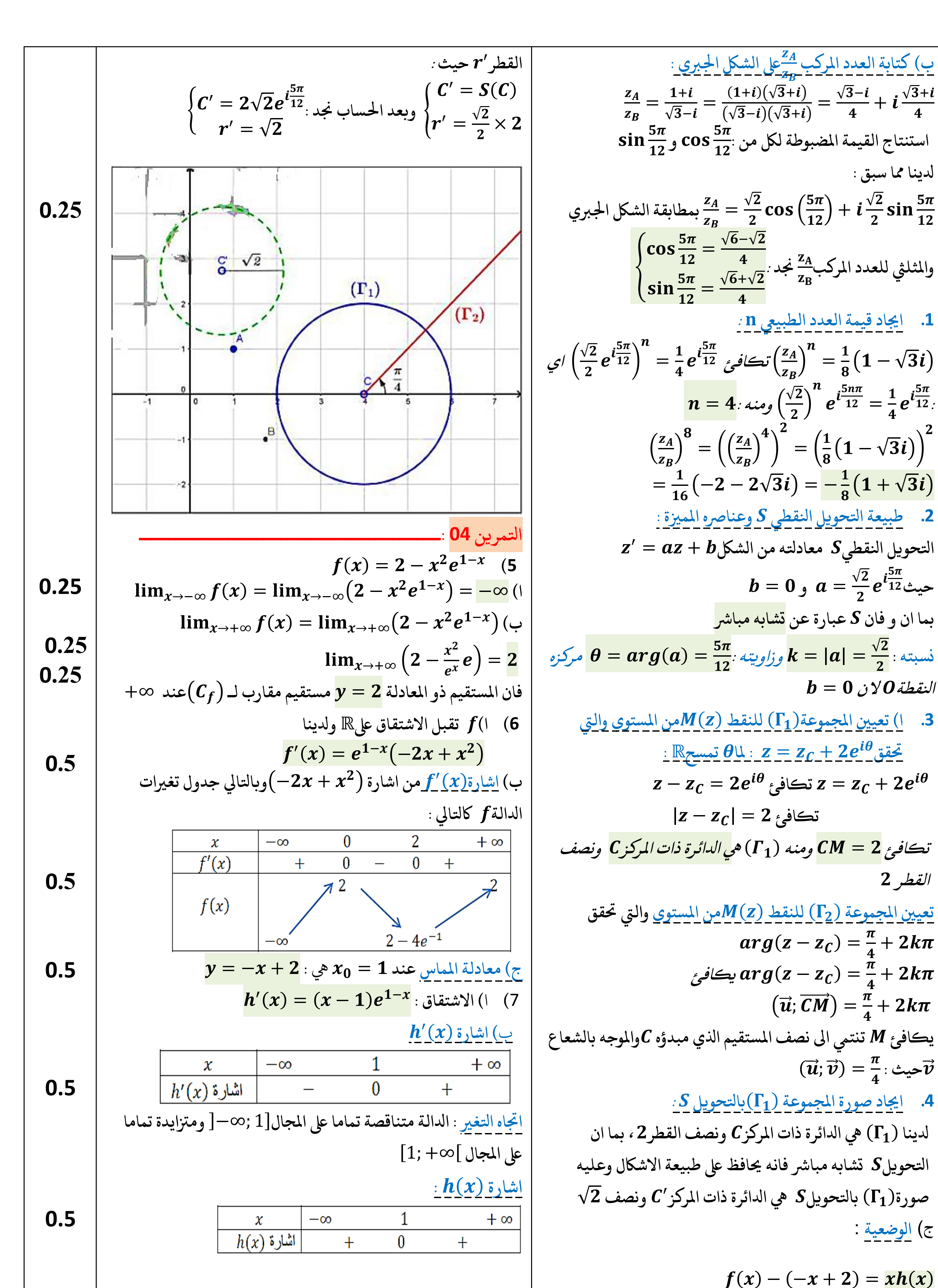
لدينا $arg(z_A) = \frac{\pi}{4}$، $|z_A| = \sqrt{2}$، $arg(z_B) = -\frac{\pi}{6}$،

$|z_B| = 2$ **(0.75)**

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{|z_A|}{|z_B|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و $arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = arg(z_A) - arg(z_B) = \frac{5\pi}{12}$

العدد المركب	الشكل المثلثي	الشكل الاسي
z_A	$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
z_B	$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$	$2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
$\frac{z_A}{z_B}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$





ب) كتابة العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_A}{z_B}=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{\sqrt{3}-i}{4}+i\frac{\sqrt{3}+i}{4}$$ **0.25**

استنتاج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$

لدينا مما سبق :

$\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{5\pi}{12}$ بمطابقة الشكل الجبري

والمثلثي للعدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ نجد: $\begin{cases}\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}$ **0.5**

1. إيجاد قيمة العدد الطبيعي n :

$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1}{8}(1-\sqrt{3}i)$ تكافئ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^n=\frac{1}{4}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ أي

: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{5n\pi}{12}}=\frac{1}{4}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ ومنه: $n=4$ **0.25**

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8=\left(\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^4\right)^2=\left(\frac{1}{8}(1-\sqrt{3}i)\right)^2$$
$$=\frac{1}{16}(-2-2\sqrt{3}i)=-\frac{1}{8}(1+\sqrt{3}i)$$ **0.5**

2. طبيعة التحويل النقطي S وعناصره المميزة :

التحويل النقطي S معادلته من الشكل $z'=az+b$

حيث $a=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ و $b=0$

بما ان و فان S عبارة عن تشابه مباشر **0.5**

نسبته : $k=|a|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ وزاويته: $\theta=arg(a)=\frac{5\pi}{12}$ مركزه

النقطة O لأن $b=0$

3. أ) تعيين المجموعة (Γ_1) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق $z=z_C+2e^{i\theta}$: لما θ تمسح $\mathbb{R}$:

$z=z_C+2e^{i\theta}$ تكافئ $z-z_C=2e^{i\theta}$ **0.5**

تكافئ $|z-z_C|=2$

تكافئ $CM=2$ ومنه (Γ_1) هي الدائرة ذات المركز C ونصف القطر 2

تعيين المجموعة (Γ_2) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق

$arg(z-z_C)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

يكافئ $arg(z-z_C)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$(\vec{u};\vec{CM})=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ **0.5**

يكافئ M تنتمي الى نصف المستقيم الذي مبدؤه C والموجه بالشعاع $\vec{v}$ حيث: $(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{4}$

4. إيجاد صورة المجموعة (Γ_1) بالتحويل S :

لدينا (Γ_1) هي الدائرة ذات المركز C ونصف القطر 2، بما ان التحويل S تشابه مباشر فانه يحافظ على طبيعة الاشكال وعليه صورة (Γ_1) بالتحويل S هي الدائرة ذات المركز C' ونصف $\sqrt{2}$ **0.5**

ج) الوضعية :

$f(x)-(-x+2)=xh(x)$

القطر r' حيث :

$\begin{cases}C'=S(C)\\ r'=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2\end{cases}$ وبعد الحساب نجد: $\begin{cases}C'=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}\\ r'=\sqrt{2}\end{cases}$ **0.25**

التمرين 04 :

5) $f(x)=2-x^2e^{1-x}$

أ) $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(2-x^2e^{1-x})=-\infty$ **0.25**

ب) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(2-x^2e^{1-x})$

$\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{x^2}{e^x}e\right)=2$ **0.25** **0.25**

فان المستقيم ذو المعادلة $y=2$ مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

6) أ) f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$f'(x)=e^{1-x}(-2x+x^2)$ **0.5**

ب) اشارة $f'(x)$ من اشارة $(-2x+x^2)$ وبالتالي جدول تغيرات الدالة f كالتالي : **0.5**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$2-4e^{-1}$	↗	2

ج) معادلة المماس عند $x_0=1$ هي : $y=-x+2$ **0.5**

7) أ) الاشتقاق : $h'(x)=(x-1)e^{1-x}$

ب) اشارة $h'(x)$: **0.5**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
اشارة $h'(x)$		−	0	+	

اتجاه التغير : الدالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

اشارة $h(x)$: **0.5**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
اشارة $h(x)$		+	0	+	

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$		$+$	0	$+$	
اشارة الفرق		$-$	0	$+$	0	$+$	

0.5

الوضع النسبي : (C_f) يقع تحت (T) على المجال $]-\infty;0[$

(C_f) يقع فوق (T) على المجالين $]0;1[$ و $]1;+\infty[$

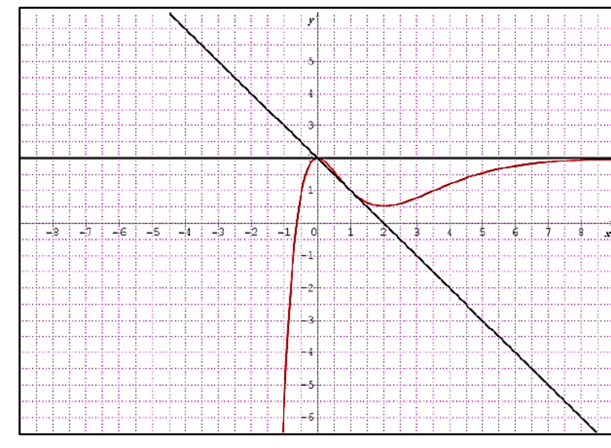
(C_f) و (T) يتقاطعان عند النقطتين ذات الفاصلتين

$x=0$ و $x=1$

1) نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $]-1;0[$

0.5

2) الانشاء :



0.75

3) المناقشة :

لدينا : $x^2e^{1-x}=-m$ ومنه : $2-x^2e^{1-x}=m+2$

$2-x^2e^{1-x}=m+2$ ومنه $f(x)=m+2=M$

(مناقشة افقية)

اذا كان :

- $M<2-4e^{-1}$ اي $m<-4e^{-1}$ فالمعادلة تقبل حلا وحيدا
- $M=2-4e^{-1}$ اي $m=-4e^{-1}$. فالمعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف
- $2-4e^{-1}<M<2$ اي $-4e^{-1}<M<0$. فالمعادلة تقبل ثلاث حلول
- $M=2$ اي $m=0$ فالمعادلة تقبل حلا وحيدا مضاعفا
- $M>2$ اي $m>0$ فالمعادلة لاتقبل حلول

0.75

4) ا) نتحقق ان : $F'(x)=f(x)$

0.5

ب) $\int_1^2 f(x)dx=F(2)-F(1)$

ومنه $\int_1^2 f(x)dx=-3+10e^{-1}$

0.5

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبي الموضوع الثاني ثالثة علـــــوم تجريبية

التنقيط	التصحيـــح المفصل

التمرين 01:

1) اكتب تمثيلا وسيطيا لكل من (D_1) و (D_2):

$(D_1): \frac{x-2}{3} = -y-1 = z-3$ معناه

$\begin{cases}\frac{x-2}{3}=t\\ -y-1=t \\ z-3=t\end{cases}; t\in\mathbb{R}$ أي $\begin{cases}x=3t+2\\y=-1-t\\z=3+t\end{cases}; t\in\mathbb{R}$ **(0.5)**

وهو تمثيل وسيطي لـ (D_1)

$(D_2): x+1 = \frac{y}{2} = 2-z$ معناه:

$\begin{cases}x+1=t'\\ \frac{y}{2}=t' \\ 2-z=t'\end{cases}; t\in\mathbb{R}$ أي $\begin{cases}x=-1+t'\\y=2t'\\z=2-t'\end{cases}; t\in\mathbb{R}$ **(0.5)**

وهو تمثيل وسيطي لـ (D_2)

2) بين ان (D_1) و (D_2) يتقاطعان في نقطة A يطلب تعيين احداثياتها **(01)**

اذا كانت $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء فان

$M\in(D_1)\cap(D_2)$: معناه $\begin{cases}3t+2=-1+t'\\-1-t=2t'\\3+t=2-t'\end{cases}$

بحل هذه الجملة نجد ان: $t=0$ ، $t'=0$ وعليه بالتعويض في احدى العبارتين نجد ان (D_1) و (D_2) يتقاطعان في النقطة $A(-1;0;2)$

3) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يحوي المستقيمين (D_1) و (D_2) **(01)**

لدينا: $\vec{u_1}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$، $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ شعاعا توجيه لـ (D_1) و (D_2) على الترتيب ، ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (P) ،

عندئذ $\begin{cases}\vec{n}.\vec{u_1}=0\\ \vec{n}.\vec{u_2}=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}3a-b+c=0\\a+2b-c=0\end{cases}$ باخذ $a=1$ نجد

بحل الجملة ان $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-4\\-7\end{pmatrix}$. وعليه معادلة المستوي (P)

من الشكل $x-4y-7z+d=0$ ولكون $A\in(P)$

وبتعويض احداثياتها في المعادلة نجد ان $d=15$ اي معادلة لـ (P) هي: $x-4y-7z+15=0$

معادلة ديكارتية لسطح الكرة هي تقاطع (S) مع المستوي الذي معادلته $z=0$ ينتج:

$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+{z_0}^2=r^2\\z=0\end{cases}$

أي $\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2-{z_0}^2\\z=0\end{cases}$

ومع المستوي الذي معادلته $y=0$ ينتج

$\begin{cases}(x-x_0)^2+{y_0}^2+(z-z_0)^2=r^2\\y=0\end{cases}$ أي

$\begin{cases}(x-x_0)^2+(z-z_0)^2=r^2-{y_0}^2\\y=0\end{cases}$ وعليه نجد

معادلة لـ (S) هي: $(x-2)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=14$ مركز (S) هو $\Omega(2;-2;-1)$ ولدينا **(01)**

المسافة بين Ω و (P) هي $d(\Omega,P)=\frac{16}{23}<\sqrt{14}$ وعليه

(S) و (P) متقاطعان وتقاطعهما دائرة

التمرين 02:

1) ا) لنفرض ان $P(z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا هو ai

حيث $a\in\mathbb{R}$ **(0.25)**

وبالتالي نجد: $-ia^3+4a^2-6ai-4=0$ يكافئ: $\begin{cases}4a^2-4=0\\-a^3-6a=0\end{cases}$ وهذا مستحيل

اذن $P(z)=0$ لاتقبل حلا تخيليا صرفا

ب) ان $P(z)=(z-2)(z^2-2z+2)$ بالنشر والمطابقة **(0.5)**

ج) $P(z)=0$ يكافئ $z=0$ او/

$z^2-2z+2=0 \dots (I)$

لنحل: (I) $\Delta=(2i)^2$ وبالتالي المعادلة (I) تقبل حلين **(0.5)**

مركبين مترافقين هما: $1-i$ ، $1+i$

المعادلة $P(z)=0$ حلولها هي: $S=\{2;1-i;\ 1+i\}$ **(0.5)**

2) ا) $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=-i$ ومنه $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$ **(0.5)**

والمثلث ABC قائم في A **(0.5)**

ب) $z_B=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_C=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ **(0.5)**

ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}z_C=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1437}+\sqrt{2}\left(\frac{z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2016}$ **(0.5)**

3) ا) تعيين θ زاوية الدوران R

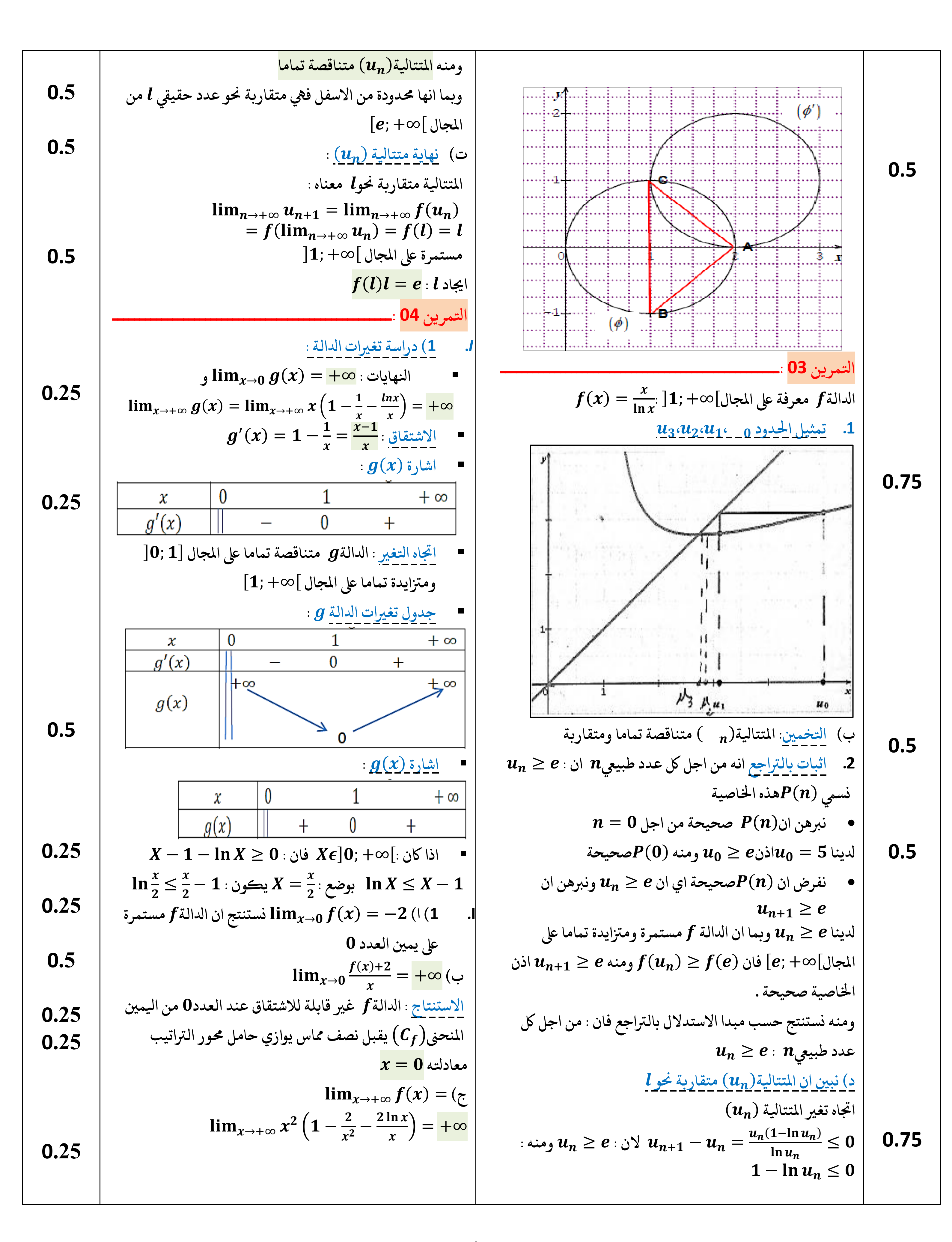
لدينا: $z_C-z_A=a(z_B-z_A)$ ومنه: $a=-1$ اذن/ **(0.5)**

$\theta=arg(a)==-\frac{\pi}{2}+2\pi k$

ب) العبارة المركبة للدوران R هي: $z'=-iz+2+2i$ **(0.5)**

$z_D=3+i$ **(0.25)**

4) الدائرة (ϕ) مركزها $I(1;0)$ ونصف قطرها 1 والدائرة (ϕ') مركزها $I'(2;1)$ صورة I بالدوران R ونصف قطرها 1 لان الدوران تقايس



0.5

التمرين 03:

الدالة f معرفة على المجال $]1;+\infty[$: $f(x)=\frac{x}{\ln x}$

1. تمثيل الحدود u_0، u_1، u_2، u_3

0.75

ب) التخمين: المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة

0.5

2. اثبات بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ان: $u_n \geq e$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية

- نبرهن ان $P(n)$ صحيحة من اجل $n=0$

لدينا $u_0=5$ اذا $u_0 \geq e$ ومنه $P(0)$ صحيحة

0.5

- نفرض ان $P(n)$ صحيحة اي ان $u_n \geq e$ ونبرهن ان $u_{n+1} \geq e$

لدينا $u_n \geq e$ وبما ان الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[e;+\infty[$ فان $f(u_n) \geq f(e)$ ومنه $u_{n+1} \geq e$ اذن الخاصية صحيحة .

ومنه نستنتج حسب مبدا الاستدلال بالتراجع فان : من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq e$

د) نبين ان المتتالية (u_n) متقاربة نحو l

اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$u_{n+1}-u_n=\frac{u_n(1-\ln u_n)}{\ln u_n} \leq 0$ لان: $u_n \geq e$ ومنه: $1-\ln u_n \leq 0$

0.75

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما

0.5

وبما انها محدودة من الاسفل فهي متقاربة نحو عدد حقيقي l من المجال $[e;+\infty[$

0.5

ت) نهاية متتالية (u_n) :

المتتالية متقاربة نحو l معناه :

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to+\infty} u_n) = f(l) = l$

مستمرة على المجال $]1;+\infty[$

0.5

ايجاد l : $f(l)l = e$

التمرين 04:

I. 1) دراسة تغيرات الدالة :

- النهايات : $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ و

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x}-\frac{lnx}{x}\right) = +\infty$

0.25

- الاشتقاق : $g'(x) = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

- اشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	

0.25

- اتجاه التغير : الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;1]$ ومتزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

0.5

- اشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$+$	

0.25

- اذا كان $X\epsilon]0;+\infty[$ فان : $X-1-\ln X \geq 0$

$\ln X \leq X-1$ بوضع : $X=\frac{x}{2}$ يكون : $\ln\frac{x}{2} \leq \frac{x}{2}-1$

0.25

II. 1) ا) $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$ نستنتج ان الدالة f مستمرة على يمين العدد 0

0.5

ب) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)+2}{x} = +\infty$

الاستنتاج : الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند العدد 0 من اليمين

0.25

المنحنى (C_f) يقبل نصف مماس يوازي حامل محور التراتيب معادلته $x=0$

0.25

ج) $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$

$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{2}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty$

0.25

2) ا) الدالتان $x \mapsto x^2 - 2$ و $x \mapsto -2x\ln x$ قابلتين للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وبالتالي الدالة f حيث $f(x) = x^2 - 2 - 2x\ln x$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ولدينا $f'(x) = 2x - 2(\ln x + 1)$ **0.25**

$f'(x) = 2g(x)$

ب) اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ وبالتالي :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

0.25

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$			$+\infty$

0.5

ج) $f'(x)$ انعدم عند $x = 1$ ولم يغير اشارته ، اذن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف احداثياتها $(1;-1)$ **0.25**

3) نطبق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $]2;3[$.

$f(3) \approx 0.40$ و $f(2) \approx -0.77$ **0.25**

4) ا) $f(2) = 2 - 4\ln 2$ و $f'(2) = 2(1 - \ln 2)$ اذن

$y = 2(1 - \ln 2)x - 2$ **0.25**

ب)

$f(x) - [2(1-\ln 2)x - 2] = 2x\left[\frac{x}{2} - 1 - \ln\left(\frac{x}{2}\right)\right] \geq 0$

الوضع النسبي: (C_f) يقع فوق (Δ) على المجالين: $]2;+\infty[$ و $]0;2[$

(C_f) و (Δ) يتقاطعان عند النقطتين ذاتا الفاصلتين : $x = 0$ و $x = 2$ **0.5**

4) الانشاء : **0.75** **0.5**

5) ا) مشتق الدالة $x \mapsto \frac{x^2}{2}(2\ln x - 1)$ على المجال $]0;+\infty[$ هو : $x \mapsto 2x\ln x$ **0.25**

الدالة $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{x^2}{2}(2\ln x - 1) + C$ حيث $(C \in \mathbb{R})$ اصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ **0.25**

ب)

$A(x) = \int_{\lambda}^{2} -f(x) = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x + \frac{x^2}{2}(2\ln x - 1)\right]_{\lambda}^{2}$

$= -\frac{2}{3} + 4\ln 2 + \frac{\lambda^3 - 6\lambda}{3} - \frac{\lambda^2}{2}(2\ln\lambda - 1)$

$\lim_{\lambda \to 0} A(\lambda) = -\frac{2}{3} + 4\ln 2$ **0.75**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — **المقاطعة الشرقية لولاية عين الدفلى**

امتحان **بكالوريا التجريبي** التعليم الثانوي — دورة : **ماي 2017**

الشعبة : **علوم تجريبية**

اختبار في مادة : **الرياضيات** — المدة: 03 ساعات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الاول: (06 نقاط)

1) نعتبر كثير حدود ذات المجهول المركب z التالي : $P(z)=z^3-(4+3i)z^2+(13+12i)z-39i$

أ/ بين أن المعادلة $P(Z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا ، يطلب تعيينه

ب/ عين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث يكون من كل عدد مركب z : $P(z)=(z-3i)(az^2+bz+c)$

ج/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $P(z)=0$

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$. A, B, C و D أربع نقط من المستوي لواحقها على الترتيب : $z_A=3i$, $z_B=\overline{z_A}$, $z_C=2-3i$, $z_D=i$

أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه B ويحول C إلى A

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC ، ثم احسب مساحته .

ج) لتكن النقطة E صورة النقطة A بالتحويل S. استنتج مساحة المثلث ABE

3) أ) احسب العدد $\dfrac{z_A-z_B}{z_D-z_B}$ ، ثم استنتج أن A صورة D بتحويل نقطي f يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة .

ب) عين طبيعة التحويل $f\circ S$ وعناصره المميزة .

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث: $z=z_A+6e^{\theta i}$ حيث $(\theta\in\mathbb{R})$

أ) تحقق أن B تنتمي إلى (Γ)

ب) عين المجموعة (Γ)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تعطى النقط :

$A(-1,1,3)$, $B(1,0,-1)$, $C(2,-1,1)$, $D(2,0,-1)$ و المستوي (P) ذي المعادلة : $2y+z+1=0$

المطلوب : أجب بصحيح او خطأ مع التبرير في كل حالة :

1) النقط C,B,D تعين مستويا حيث : $(\alpha,t)\in{}^2$ / $\begin{cases} x=-1-t \\ y=-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases}$ $\mathbb{R}$ تمثيل وسيطي له

2) المستقيم (BC) محتوى في المستوي (P).

3) سطح الكرة (S) ذات المركز A ونصف القطر $R=\dfrac{6}{5}$ تمس المستوي (P).

4) المستوي المحوري للقطعة $[BC]$ عمودي على المستوي (P).

5) النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD).

التمرين الثالث : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=u_n\cdot e^{-u_n}$

1) ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n>0$

ب) بين أن (u_n) متناقصة تماما

ج) استنتج أن (u_n) متقاربة , ثم احسب نهايتها

2) (w_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ: $w_n=\ln(u_n)$

ا) اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n=w_n-w_{n+1}$

ب) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n المجموع : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

بين أن $S_n=w_0-w_{n+1}$ ، ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=1-e^{2x}-2x\,e^{2x}$

1) أ) عين نهايتي الدالة g

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2) احسب $g(0)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f دالة العددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+3-x\,e^{2x}$

نرمزبـ (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) عين نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$

2) بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β حيث $-3,5<\alpha<-3$ و $0,5<\beta<1$

5) ارسم (Δ) و (C_f)

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عين الدالة الأصلية للدالة $x\to xe^{2x}$ التي تنعدم من أجل $x=0$

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذي المعادلتين $x=0$ و $x=1$

III) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها

انتهى الموضوع الاول

الموضوع الثاني

التمرين الاول : (05 نقاط)

1- نعتبر العدد المركب a حيث : $a=-2+2i\sqrt{3}$

ا) اكتب a على الشكل الآسي

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n العدد a^{3n} حقيقي

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $z^2=a$

2- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط $B;A$ و C ذات اللواحق على الترتيب

$z_A=-2$ ، $z_B=-1-i\sqrt{3}$ و $z_C=-1+i\sqrt{3}$

ا) بين أن $B;A$ و C تنتمي إلى نفس الدائرة , التي يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها

ب) أنشئ بدقة النقط $B;A$ و C

ج) احسب الطويلة و العمدة للعدد المركب $\frac{z_c-z_A}{z_B-z_A}$ ثم استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين

د) ما طبيعة الرباعي $OCAB$ ؟

3- نعتبر S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$z'=(1+i)z-2$

ا) حدد طبيعة التحويل S و عناصره المميزة

ب) عين لاحقة I' صورة I مركز ثقل الرباعي $OCAB$ بالتحويل S

التمرين الثاني: (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ النقطتان $A(8;0;8)$ و $B(10;3;10)$ و المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x=-5+3t \\ y=1+2t,,,(t\in\mathbb{R}) \\ z=-2t \end{cases}$$

1) أ/ عين تمثيل وسيطي للمستقيم (AB)

ب/ بين إن المستقيمان (D) و (AB) ليسا من نفس المستوي

2) ليكن (P) المستوي الموازي لـ (D) و يحوي (AB)

ا) بين أن $\vec{n}(2;-2;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

ب) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)

3) M نقطة كيفية من المستقيم (D). بين أن المسافة بين M و المستوي (P) مستقلة عن اختيار M

4) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم الناتج عن تقاطع المستويين (P) و (xoy)

التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على N كما يلي: $u_0=8$ و $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$.

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ) أنشئ (D) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1}{4}x+3$ والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

ب) مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 . مع ابراز خطوط التمثيل

ج) ما تخمينك حول تقارب و اتجاه تغير المتتالية (u_n)؟

2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4<u_n\leq 8$.

ب)بين أن المتتالية (u_n)متناقصة تماما.

ج) استنتج أن (u_n) متقاربة .

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=u_n-4$.

أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

ج) اكتب بدلالة n المجموع : $S_n=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{v_1}+...+\frac{1}{v_n}$. ثم احسب $\lim_{n\to+\infty}S_n$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

f الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ بـــ : $f(x)=x+1+\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

(C) المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

1. أ/ أثبت أنه من أجل كل x من $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$: $f(-x)+f(x)=2$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C)؟

ب/ أحسب $\lim_{x\underset{>}{\to}1}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

ج/ تحقق أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$ فإن: $f(x)=x+1+\ln(x-1)-\ln(x+1)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f

على المجال $]1;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أ/ بين أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D) عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ب/ بين أن المنحنى (C) تحت المستقيم (D) على المجال $]1;+\infty[$

3. بين أن المنحني (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها a من المجال $]1,2;1,3[$

4. أحسب $f(2)$، $f(3)$ ثم أنشئ المستقيمات المقاربة والمنحنى (C)

5. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x)=x+m$

6. أ/ باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد الدالة الأصلية للدالة g حيث: $g(x)=\ln(x+\beta)$ على المجال $]-\beta;+\infty[$ حيث β

عدد حقيقي معلوم التي تنعدم من أجل $x=2$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1;+\infty[$

ب/ أحسب بالسنتمترالمربع S مساحة الحيز المستوي المحدد بين المنحني (C) والمستقيم (D)والمستقيمين اللذين

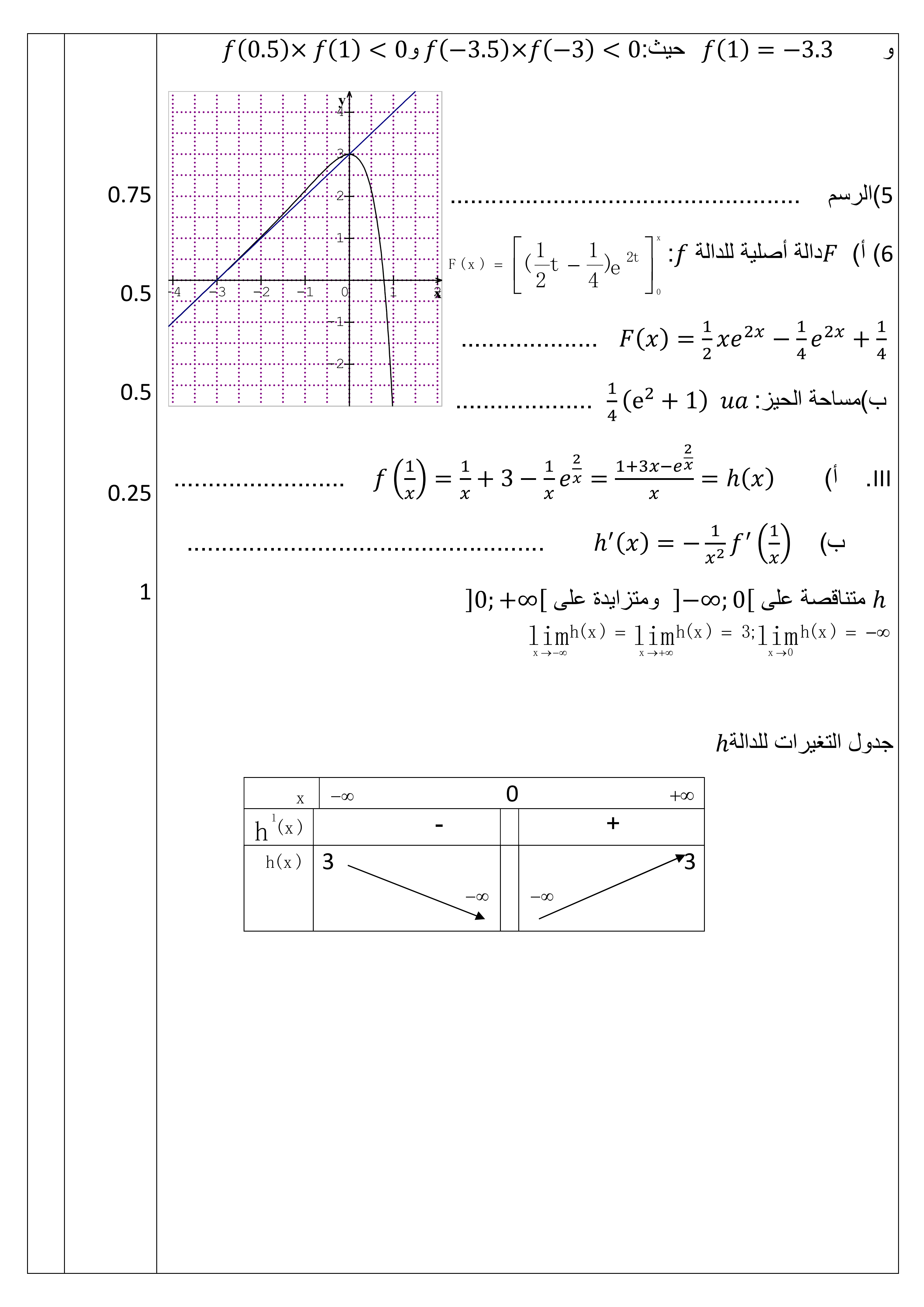
معادلتاهما: $x=2$ و $x=3$

الإجابة النموذجية لموضوع بكالوريا تجريبي دورة 2017

إختبار مادة : الرياضيات　　　　الشعبة : علوم تجريبية　　　　المدة : 3ساعات

الموضوع الأول — عناصر الإجابة	العلامة مجزأ	العلامة المجموع
التمرين الأول: (5 ن)		5ن
1) أ) $p(\alpha i)=0$ معناه $\alpha=3$, إذن $z=3i$	0.25	
ب) $p(z)=(z-3i)(z^2-4z+13)$	0.5	
ج)حل المعادلة : $\Delta=-36=(6i)^2$; $z_0=3i$; $z_1=2-3i$; $z_2=2+3i$	0.75	
2)أ) العبارة المركبة للتشابه s : $(z'+3i)=3i(z+3i)$ أو $z'=3iz-3i-9$	0.5	
ب) $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=3i$ ومنه $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}$ إذن ABC قائم في B	0.5	
مساحته : $6\ ua$	0.25	
ج)المثلث ABE صورة المثلث ABC ومنه $S_{ABE}=6\times3^2=54\ ua$	0.5	
3)أ) $\frac{z_A-z_B}{z_D-z_B}=\frac{3}{2}$ ومنه f هو تحاك نسبته $\frac{3}{2}$ ومركزه B	0.5	
ب) fos هو تشابه مباشر مركزه B ونسبته $3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$	0.5	
4)أ) $\lvert z_B-z_A\rvert=\lvert -6i\rvert=6$ ومنه B تنتمي إلى (γ)	0.25	
ب) (γ) هي دائرة مركزها A ونصف قطرها 6	0.5	
التمرين الثاني : (4 ن)		4ن
1)صحيح: إحداثيات C تحقق الجملة من أجل $t=-3$; $\alpha=1$ إحداثيات B تحقق الجملة من أجل $t=-2$; $\alpha=0$ إحداثيات D تحقق الجملة من أجل $t=-3$; $\alpha=0$	1	
2)صحيح : إحداثيات C و B تحقق معادلة المستوي (p)	0.5	
3)خطأ : $d(A;p)=\frac{6}{\sqrt{5}}>\frac{6}{5}$	0.5	
4)صحيح : $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$; $\vec{n}(0;2;1)$; $\overrightarrow{BC}.\vec{n}=0$	1	
5) خطأ : $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$; $\overrightarrow{AC}(3;-2;-2)$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}\neq0$	1	

التمرين الثالث:(4 ن)		4ن
1) أ) $U_0 > 0$محققة ; نفرض $U_n > 0$ ولدينا $e^{-U_n} > 0$ ومنه $U_n e^{-U_n} > 0$ إذن $U_{n+1} > 0$..	0.75	
ب)$U_{n+1} - U_n = U_n(e^{-U_n} - 1)$ و $e^{-U_n} < 1$ ومنه (U_n) متناقصة	0.5	
ج) (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة	0.25	
نضع $lim\ U_n = l$ ومنه $l = l\,e^{-l}$ إذن $l = 0$	0.75	
2) أ) $U_n = ln\frac{U_n}{U_n e^{-U_n}} = l□_n - lnU_n e^{-U_n}$ $W_n - W_{n+1} =$	0.5	
ب) $S_n = (W_0 - W_1) + (W_1 - W_2) + \cdots + (W_n - W_{n+1}) = W_0 - W_{n+1}$	0.5	
$limW_n = \lim \ln U_n = -\infty$ ومنه $\lim S_n = +\infty$	0.75	7ن
التمرين الرابع:(7 ن)		
I. 1) أ) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$	0.5	
ب) $g'(x) = 2e^{2x}(-2-2x)$	0.75	
إشارة $g'(x)$: $-\infty$ + -1 − $+\infty$		
gمتزايدة تماما على $]-\infty;-1]$		
gمتناقصة تماما على $[-1;+\infty[$. جدول التغيرات $g(-1) = 1 + e^{-2}$		
2) $g(0) = 0$ إشارة $g(x)$: $-\infty$ + 0 − $+\infty$	0.5	
II. 1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + 3 - \frac{1}{2}(2xe^{2x}) = -\infty$	0.5	
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1 + \frac{3}{x} - e^{2x}) = -\infty$		
2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+3) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}(2xe^{2x}) = 0$	0.25	
$y = x + 3$ م م م عند $-\infty$		
3) $f'(x) = 1 - (e^{2x} + 2xe^{2x}) = g(x)$	0.5	
fمتزايدة على $]-\infty;0]$ ومتناقصةعلى $[0;+\infty[$ ' جدول التغيرات و $f(0) = 3$	0.5	
4) f مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $[-3.5;-3]$; $[0.5;1]$ و	0.5	
$f(-3.5) = -0.49$ و $f(-3) = 0.007$ و $f(0.5) = 2.14$		



و $f(1) = -3.3$ حيث: $f(-3.5)\times f(-3) < 0$ و $f(0.5)\times f(1) < 0$

5)الرسم 0.75

6) أ) Fدالة أصلية للدالة f: $F(x) = \left[(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4})e^{2t} \right]_0^x$

$F(x) = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{4}$ 0.5

ب)مساحة الحيز: $\frac{1}{4}(e^2+1)\ ua$ 0.5

III. أ) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + 3 - \frac{1}{x}e^{\frac{2}{x}} = \frac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x} = h(x)$ 0.25

ب) $h'(x) = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$ 1

h متناقصة على $]-\infty;0[$ ومتزايدة على $]0;+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) = 3; \lim_{x\to0} h(x) = -\infty$

جدول التغيرات للدالة h

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		-	‖	+	
$h(x)$	3	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	3

الموضوع الثاني — عناصر الإجابة	العلامة مجزأ	
التمرين الأول (5 ن)		5ن
1) أ) $a=4e^{i\frac{2\pi}{3}}$	0.5	
ب) $a^{3n}=64^{n}$ ومنه $a\in IR$	0.5	
ج) $z^{2}=a$ يعني $z=1+i\sqrt{3}$ أو $z=-1-i\sqrt{3}$	0.75	
2) أ) لدينا $\|z_A\|=\|z_B\|=\|z_C\|=2$ ومنه $OA=OB=OC=2$		
$A\,;B\,;C$ تنتمي إلى الدائرة ذات المركز O ونصف القطر 2	0.5	
ب) الإنشاء: B و C تنتمي إلى نفس الدائرة وإلى المستقيم ذو المعادلة $x=-1$	0.75	
ج) $\left\|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{2\pi}{3}$	0.75	
$\frac{AC}{AB}=1$ ومنه ABC متساوي الساقين	0.25	
د) الرباعي $OACB$ معين	0.25	
3)أ) التحويل النقطي S هو تشابه مباشر نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ومركزه ذو اللاحقة $-2i$ ...	0.5	
ب) $z_I=-1$ ومنه $z_{I'}=-3-i$	0.25	
التمرين الثاني:(4 ن)		4ن
1) $(AB):\begin{cases}x=8+2k\\y=3k\\z=8+2k\end{cases}\quad(k\in IR)$	1	
2) لدينا $\overrightarrow{AB}(2;3;2)$ و $\overrightarrow{u_D}(3;2;-2)$ ومنه $\frac{2}{3}\neq\frac{3}{2}$ ولا توجد ثنائية $(t;k)$ تحقق الجملة .	0.75	
$\begin{cases}-5+3t=8+2k\\1+2t=3k\\-2t=8+2k\end{cases}$		
3) أ) $\vec{n}(2;-2;1)$ ناظمي للمستوي (p) لأن : $\vec{n}.\overrightarrow{u_D}=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0$	0.5	
ب) $(p):\ 2x-2y+z-24=0$	0.75	

الإجابة	العلامة		المجموع
ج) $d(M;p) = 12$	0.5		
4) $(k' \in IR)$ $(p) \cap (xoy): \begin{cases} x = k' \\ y = k' - 12 \\ z = 0 \end{cases}$	0.5		
<u>التمرين الثالث :</u>(4 ن)			
1) أ) التمثيل البياني للمستقيمين	0.5		4ن
ب) تمثيل الحدود $U_3; U_2; U_1; U_0$	0.5		
ج) التخمين : المتتالية(U_n) متناقصة ومتقاربة نحو 4	0.25		
2) أ) $4 < U_0 \leq 8$ محققة ; نفرض $4 < U_n \leq 8$ ومنه $4 < \frac{1}{4}U_n + 3 \leq 5$ ومنه .... $4 < U_{n+1} \leq 8$	0.5		
ب)- $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{4}U_n + 3 - U_n = -\frac{3}{4}U_n + 3$ وبمأن $4 < U_n \leq 8$ فإن : ... $U_{n+1} - U_n < 0$ ومنه (U_n)متناقصة	0.5		
ج)بمأن (U_n)متناقصة على IN ومحدودة من الأسفل بالعدد 4 فهي متقاربة	0.25		
3) أ) (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول 4	0.5		
ب) $U_n = (\frac{1}{4})^{n-1} + 4$	0.25		
$\lim_{n\to+\infty} U_n = 4$ لأن $-1 < \frac{1}{4} < 1$	0.25		
ج) $S_n = \frac{1}{12}(4^{n+1} - 1)$ و $\lim_{x\to+\infty} s_n = +\infty$	0.5		
<u>التم رين الرابع :</u>(7 ن)			7ن
1) أ) $f(x) + f(-x) = 2 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2 + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2$ ...	0.5		
النقطة (0,1)مركز تناظر لـ (C_f)	0.25		
ب)$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to1>} f(x) = -\infty$	0.5		
ج)$x + 1 > 0$ و $x - 1 > 0$ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$			

	العلامة	
	0.5	إذن $f(x)=\ln(x-1)-\ln(x+1)+x+1$ ....
	1	$f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+1=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ .... f متزايدة على المجال $]1;+\infty[$ جدول التغيرات
	0.25	2) أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0$ .... $y=x+1$ معادلة مستقيم مقارب لمنحني الدالة f بجوار $+\infty$
	0.5	لدينا $\frac{x-1}{x+1}<1$ ومنه $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)<0$ إذن (C_f) تحت (d) ....
	0.5	ب) لدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على $[1.2;1.3]$ و $f(1.2)=-0.19$ و .... $f(1.3)=0.26$ أي $f(1.2)\times f(1.3)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α من المجال $]1.2;1.3[$
	0.25	ج) $f(3)=4-ln2\,;\,f(2)=3-ln3$ ....
	0.75	الرسم : ....
	0.5	المناقشة البيانية : $m\in\,]-\infty;1[$ للمعادلة حل واحد موجب .... $m\in[1;+\infty[$ ليس للمعادلة حل
	1	3) أ) الدالة الأصلية للدالة g هي $x\to\left[(t+\beta)\ln(t+\beta)-t\right]_2^x$ $x\to -x+(x+\beta)\ln(x+\beta)-(2+\beta)\quad \ln(2+\beta)+2$ .... الدالة الأصلية للدالة f هي $x\to(x-1)\ln(x-1)-(x+1)\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2+x$
	0.5	ب) $\int_2^3(y-f(x))dx=[-(x-1)\ln(x-1)+(x+1)\ln(x+1)]_2^3=(-2ln2+4ln4-3ln3)$ $S=(-2ln2+4ln4-3ln3)\times 4cm^2$ ....

الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
المقاطعة الشرقية
لولاية عين الدفلى
الشعبة: رياضيات

المفتشية العامة للبيداغوجية
امتحان البكالوريا التجريبي
دورة ماي 2017

اختبار في مادة الرياضيات — المدة: 4 ساعات

على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) بين أن العدد 2017 أولي.

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $14119x - 10085y = 22187 \ldots\ldots (E)$

أ/ أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد: 22187 ، 10085 و 14119.

ب/ بين أن الثنائية $(3;2)$ حلا خاصا للمعادلة (E) ثم عين مجموعة حلولها.

ج/ عين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون $PGCD(x\,;y) = 11$.

3) أ/ أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 7^n على 11.

ب/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $7^{2017} + 5^n$ قبلا للقسمة على 11.

4) ليكن a و b عددان طبيعيان غير معدومين كلا منهما أصغر من 8 ، نعتبر $N = \overline{a01b}$ مكتوب في النظام العشري

أ/ تحقق أن : $10^3 \equiv (-1)[11]$.

ب/ عين قيم العدد الطبيعي N حيث باقي قسمته على 11 هو 4.

ج/ أكتب هذا العدد في النظام ذي العد 11.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) عين العددين الحقيقيين x و y بحيث $+0 = 4 \ \ x^2\ e^{2iy}$ و $x > 0$ ثم تحقق أن العدد المركب $-2i$ يحقق هذه المساواة.

2) نرفق بكل عدد مركب Z يختلف عن $-2i$ العدد المركب Z' حيث: $Z' = \frac{Z-2i}{Z+2i}$.

لتكن النقط A ، B ، M ، M' صور الأعداد $2i$ ، $-2i$ ، Z و Z' على الترتيب في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\,;\vec{u};\vec{v})$. نضع : $Z \ \ -2i = +r\ e^{i\theta}$ حيث $r\epsilon\ \mathbb{R}_+^*$ و $\theta\epsilon\ \mathbb{R}$.

أ/ بين أن : $Z' - 1 = \frac{4}{r}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$.

ب/ عين مجموعة النقط M التي من أجلها يكون Z' عددا حقيقيا.

ج/ بين أنه إذا كانت M تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها B و نصف قطرها 2 فإن M' تنتمي إلى دائرة (C') يطلب تحديد عناصرها المميزة.

3) نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة I ذات اللاحقة $\frac{3\sqrt{2}}{2}\, e^{i\frac{}{4}}$ و زاويته α .

أ/ عين القيس الرئيسي للعدد α إذا علمت أن صورة A بالدوران R هي النقطة ذات اللاحقة 1.

ب/ عين على الرسم النقط : $A\ ;\ B\ ;\ I$.

ج/ تحقق أن الدائرة (C') صورة دائرة مركزها A بالدوران R ثم أرسم شكلا في نفس المعلم السابق.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ :

$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n} \end{cases}$ من أجل $n \geq 2$ و $v_n = u_n - \ln n$ من أجل $n \geq 1$.

1). أ/ أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 .

ب/ بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots\dots + \frac{1}{n}$

2). أ/ بين من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} . dx \leq \frac{1}{k}$

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$: $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$ و $0 \leq v_n \leq 1$.

3). أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$.

ب/ استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

4). أ/ بين أن المتتالية (v_n) متقاربة ، نرمز بـ α إلى نهاية المتتالية (v_n) (لا يطلب حساب α)

ب/ ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

k عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_k(x) = x - 1 + x e^{kx}$.

نرمز بـ (C_k) للمنحنى الممثل للدالة g_k في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

I – نعتبر الدالة g_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g_k(x) = 1 + (1 + kx)\, e^{kx}$.

1. أدرس $g'_k(x)$ ثم أدرس إشارته.
2. شكل جدول تغيرات الدالة g_k ، ثم استنتج أنه من اجل كل عدد حقيقي x ، $g_k(x) > 0$.

II – 1. أ/ بين أن جميع المنحنيات (C_k) تمر بنقطة ثابتة I يطلب تعيين إحداثيتيها .

ب/ أحسب نهاية الدالة f_k عند $-\infty$ و $+\infty$.

جـ/ بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_k) بجوار $-\infty$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f_k ثم شكل جدول تغيراتها .
3. أ/ عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_k) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

ب/ بين أن النقطة $F_k\left(-\frac{2}{k}; -\frac{2}{k}(1 + e^{-2}) - 1\right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_k) .

4. أ/ بين أن المعادلة $f_k(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 \leq \alpha \leq 1$.

ب/ بين أن المسافة بين النقطة $N(\alpha; f_1(\alpha))$ و المستقيم (D) تساوي $\alpha e^{\alpha} / \sqrt{2}$.

5. أ/ بين أنه من أجل عدد حقيقي ، $f_k(x) + f_{-k}(-x) = -2$. ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_k) و (C_{-k}) ؟.

ب/ أرسم في نفس المعلم (C_1) و (C_{-1}) .

III – λ عدد حقيقي سالب تماما. نعتبر التكامل التالي: $I_k = \int_\lambda^0 -x e^{kx} dx$.

1. هل العدد I_k يمثل مساحة؟.
2. باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب I_1 ثم $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} I_1$ ، فسر هذه النتيجة.
3. بين أن : $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} I_k = \frac{1}{k^2}$



الموضوع الثاني:

التمرين الاول : (04 نقط)

I- a ، b و c أعداد طبيعية حيث : $1 \le a \le b \le c$

عين الأعداد a ، b و c علما أن في النظام ذي الأساس a يكون $b+c=\overline{46}$ و $bc=\overline{545}$.

II- نعتبر المعادلة $21x-17y=8$ ....(1) ، حيث x و y عددين صحيحين طبيعيين .

1. أ) عين الثنائية $(x_0;x_0)$ حل للمعادلة (1) .
ب) حل في $\mathbb{N}^2$ المعادلة (1) .

2. أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 .

ب) بين أنه إذا كان $(\alpha;\beta)$ حل للمعادلة (1) فإن $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 0[13]$.

3 . أ) بين أنه إذا كان $(x;y)$ حل للمعادلة (1) و $x\equiv 0[4]$ فإن $y\equiv 0[4]$.

ب) عين $(x;y)$ حلول للمعادلة (1) التي يكون من أجلها $PGCD(x;y)=4$

التمرين الثاني : (05 نقط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{u};\vec{v})$.لتكن النقط H,D,C,B,A التي لواحقها على الترتيب :

$$Z_H=1+Z_D\ ,\ Z_D=-\frac{1}{a}i\ ,\quad Z_C=ia\quad ,\ Z_B=1+\frac{a-1}{a}i\ ,\ Z_A=a$$

حيث a عدد حقيقي موجب تماما ويختلف عن 1 .

1) أ - تحقق أن : $Z_B-Z_D=\overline{Z_D}(Z_A-Z_C)$

ب- أستنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان .

2) أ – عين الكتابة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول A إلى B ويحول C إلى D.

ب- حدد Z_Ω لاحقة المركز Ω للتحويل S .ثم عين العناصر المميزة الأخرى لهذا التحويل .

ج – بين أن المثلثين OAC و BHD متشابهان ثم جد علاقة بين مساحتيهما .

3) لتكن (M_n) متتالية نقط من المستوي معرفة كما يلي : $M_0=A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+1}=S(M_n)$

حيث Z_n لاحقة النقطة M_n ونضع : $U_n=|Z_n-Z_\Omega|$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ- بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
ب- عين قيم a بحيث تكون (U_n) متتالية متقاربة .
جـ - نرمز بـ T_n إلى مجموعة أطوال القطع المستقيمة $[M_{n+1}\Omega],[M_n\Omega],..........,[A\Omega]$.أحسب المجموع T_n بدلالة n.

4)لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z=a(1+e^{i\theta})$ حيث $\theta\in R$.

* حدد الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (Γ) لما يمسح العدد θ المجموعة R.

التمرين الثالث : (04 نقط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط : $A(3;2;1)$, $B(3;5;4)$, $C(0;5;1)$

1- بين أن المثلث ABC متقايس الاضلاع .

2- تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ،ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

3- أ) .عين إحداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

ب). عين تمثيلا وسيطيا لـلمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G ويعامد المستوي (ABC) .

جـ).نعتبر النقطة $S(2+t;4+t;2-t)$ حيث t عدد حقيقي .عين العدد t حتى يكون $AS^2 = AB^2$.

4-أ).عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4;6;0)$ ثم أحسب حجمه V.

ب).بين أن المستقيمين (FA) و (BC) متعامدان .

جـ).لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\left\|\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MF}\right\| = 6$

بين أن المستوي (ABC) يقطع (S) وفق دائرة محيطة بالمثلث ABC يطلب مركزها وطول نصف قطرها .

التمرين الرابع :(07 نقط)

I- بين أن $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \ge 1$ ، $f(x)=\ln x+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)$

ب) من أجل $x \ge 1$ ،بين أن $x-1=\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$

جـ) بين أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند1.فسر النتيجة بيانيا.

2. أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) بين أنه كل من أجل عدد حقيقي x من المجال $]1;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ،ثم شكل جدول تغير الدالة f .

جـ) أرسم المنحى (C_f) .

3. ليكن S مساحة الحيز D المنحى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=3$

A و B نقطتان من (C_f) فاصلتهما على الترتيب 1و3 ، والنقطتان $p(1;2\ln(1+\sqrt{2}))$ و $Q(3;0)$ من المستوي .

أ) أحسب مساحة كل من المستطيل $APBQ$ و المثلث ABQ .

ب) أستنتج أن $2\ln(1+\sqrt{2}) \le S \le 4\ln(1+\sqrt{2})$.(ملاحظة $\left((1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}\right)$) .

III- نعتبرالدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}$ و (C_g) تمثيلها البياني.

1. بين أنه كل من أجل عدد حقيقي $x \geq 0$: $g(x) \geq 1$.

2. أ) بين أن $g \circ f(x) = x$.ثم بين أنه إذا كانت $M(x;y)$ نقطة من (C_f) فان $M^{/}(x;y)$ نقطة من (C_g) .

ب) ماذ تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C_f) و (C_g) ؟أرسم المنحنى في المعلم السابق (C_g).

3. ليكن $S^{/}$ مساحة الحيز $D^{/}$ المحدد بالمنحى (C_g) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 0$ ، $x = 2\ln(1+\sqrt{2})$ و $y = 3$.

أ) بين أن $S^{/} = 6\ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$

ب) أحسب $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)dx$ ثم أستنتج قيمة S .

المستوى: السنة الثالثة ثانوي
تصحيح البكالوريا التجريبي
دورة ماي 2017

المقاطعة الشرقية
لولاية عين الدفلى
الشعبة: رياضيات

تصحيح الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

1) $\sqrt{2017} \approx 44,9$

العدد 2017 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{2017}$ فإن 2017 عدد أولي . **(0,25)**

2) أ/ $PGCD$ 2017=(22187; 10085; 14119). **(0,25)**

ب/ فعلا محققة تصبح (E) من الشكل: $7x - 5y = 11$. **(0,25)**

$S = \{(5k+3, 7k+2); k \epsilon \mathbb{Z}\}$. **(0,25)**

ج/ $S = \{(55k'+33, 77k'+44); k' \epsilon \mathbb{Z}\}$. **(0,5)**

3) أ/ $5^{4k+r} \equiv 5^r [11]$ حيث $r \epsilon \{0,1,2,3\}$. **(0,5)**

بواقي قسمة 5^n على 11 هي: 1 ، 5 ، 4 ، 9.

$7^{10k+r} \equiv 7^r [11]$ حيث $r \epsilon \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

بواقي قسمة 7^n على 11 هي: 1 7 5 2 3 10 4 6 9 8 . **(0,5)**

ب/ $n = 4k+1$; $k \epsilon \mathbb{N}$ **(0,25)**

4) أ/ محققة **(0,25)**

ب/ 1016 ، 2017 ، 7011 **(0,5)**

ج/ $7011 = \overline{52\alpha 4}^{11}$ ، $1016 = \overline{844}^{11}$ ، $2017 = \overline{1574}^{11}$

$\alpha = 10$. **(0,5)**

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1) $x^2 e^{2iy} + 4 = 0$ تكافئ $x^2 e^{2iy} = 4e^{i\pi}$

و منه $\begin{cases} x^2 = 4 \\ 2y = \pi + 2\pi k \end{cases}$ مع $\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$ **(0,5)**

ـ التحقق:

$= 2e^{-i\frac{\pi}{2}} - 2i$

$2^2 e^{-2i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = -4+4 = 0+4$ **(0,25)**

2) أ/ $z' - 1 = \frac{4}{r}\left(\frac{-i}{e^{i\theta}}\right)$ و منه $z' - 1 = \frac{4}{r} e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ **(0,5)**

ب/ $z' \epsilon \mathbb{R}$ يكافئ $Arg(z') = \pi k$ ، $k \epsilon \mathbb{Z}$

$z' \epsilon \mathbb{R}$ يكافئ $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = \pi k$

مجموعة النقط M هي مستقيم (AB) أي محور التراتيب ما عدا النقطة B **(0,5)**

ج/ $M \epsilon (C)$ معناه $|z + 2i| = 2$

$M \epsilon (C)$ معناه $z = 2e^{i\theta} - 2i$ ، $\theta \epsilon \mathbb{R}$

من أ/ $z' - 1 = 2e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$

$z' - 1 = 2e^{i\alpha}$ $\left(\alpha = -\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ **(0,5)**

$|z' - 1| = 2$ معناه $M'K = 2$

M' تنتمي إلى الدائرة (C') التي مركزها K ذات اللاحقة 1 و طول نصف قطرها 2 **(0,25)**

3) أ/ $R(A) = K$

$z_K - z_I = a(z_A - z_I)$ $\quad z_I\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ **(0,25)**

ب/ **(0,5)**

ج/ $R(A) = K$ مع K مركز الدائرة (C')

(C') هي صورة (C) التي مركزها A بـ R **(0,25)**

الرسم : **(0,5)**

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) أ/ $u_2 = \frac{3}{2}$ ، $u_3 = \frac{11}{6}$ ، $u_4 = \frac{25}{12}$ **(0,75)**

ب/ البرهان بالتراجع **(0,75)**

2) أ/ لدينا :

$k \leq x \leq k+1$ و منه $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$

و منه $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$

و بالتالي: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ **(0,5)**

ب/ لدينا: $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

$k=1$: $\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq 1$

$k=2$: $\frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{2}$

$\vdots$

$k=n-1$: $\frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n-1}$

بالجمع و حسب علاقة شال للتكامل

$u_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq u_n - \frac{1}{n}$

$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$ **(0,5)**

و نبين أن $0 \leq v_n \leq 1$

لدينا : $u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n}$

$-1 \leq \ln n - u_n \leq -\frac{1}{n}$

$0 < \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1$

أي $0 \leq v_n \leq 1$ **(0,5)**

3) أ/ $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$ **(0,5)**

ب/ بما أن

$\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ لأن $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$

و عليه $\frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq 0$

أي $v_{n+1} - v_n \leq 0$

(v_n) متناقصة على $\mathbb{N}^*$ **(0,5)**

$a = i$ و منه $\alpha = \frac{\pi}{2}$

تابع التمرين الثالث:

4) أ/ (v_n) متناقصة و محددة من الأسفل فإنها متقاربة **(0,5)**

ب/ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}(v_n + \ln n) = +\infty$ **(0,5)**

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I.1) $g'_k(x) = k(2+kx)\, e^{kx}$ **(0,25)**

x	$-\infty$	$-\frac{2}{k}$	$+\infty$
$g'_k(x)$	$-$	0	$+$

(0,25)

x	$-\infty$	$-\frac{2}{k}$	$+\infty$
$g'_k(x)$	$-$	0	$+$
$g_k(x)$	1 ↘	$1-e^{-2}$	↗ $+\infty$

(0,5)

حسب جدول تغيرات g_k لدينا:

$g_k(x) \geq 1 - e^{-2} \geq 0$ **(0,25)**

وعليه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g_k(x) \geq 0$.

II.1) أ/ $f_k(0) = 1$

جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطة ثابتة $I(0;1)$ **(0,25)**

ب/ $\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = -\infty$ **(0,25)**

$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = +\infty$ **(0,25)**

ج/ $\lim_{x\to-\infty}[f_k(x) - y] = 0$ **(0,25)**

2) لدينا:

$f'_k(x) = 1 + (1+kx)e^{kx}$ **(0,25)**

$f'_k(x) = g_k(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_k(x)$	$+$	
$f_k(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

(0,5)

3) أ/ $(\Delta): y = 2x - 1$ **(0,25)**

ب/ $f''_k(x) = g'_k(x)$ **(0,25)**

$f''_k(x)$ ينعدم عند $-\frac{2}{k}$ و يغير إشارته عندها إذن النقطة F_k نقطة انعطاف للمنحني (C_k) **(0,25)**

4) أ/ مبرهنة القيم المتوسطة **(0,25)**

ب/ $d(N;(D)) = \frac{|\alpha-1|}{\sqrt{2}}$

$d(N;(D)) = \frac{1-\alpha}{\sqrt{2}}$ لأن $(\alpha - 1 < 0)$ **(0,25)**

تابع التمرين الرابع:

5) أ/ $f_k(x) + f_{-k}(-x) = -2$ محققة.

الإستنتاج:

$M(x; f_k(x)) \in (C_k)$ فإن $M'(-x; f_k(x) - 2)$ من (C_{-k}) **(0,25)**

و منتصف $[MM']$ هي $I(0;-1)$ فإن (C_k) و (C_{-k}) متناظرين بالنسبة إلى I **(0,25)**

ب/رسم (C_1) و (C_{-1}) **(0,25) + (0,25)**

III .1) من أجل $x \leq 0$:

$(x-1) - f_k(x) = -xe^{kx} \geq 0$

إذن $_k$ هو مساحة الحيز المحدد بـ (C_k) و المستقيمات التي معادلاتها : $x = 0$ ، $x = \lambda$ و $y = x - 1$ **(0,25)**

2) $I_1 = 1 + \lambda e^{\lambda} - e^{\lambda}$ **(0,25)**

$\lim_{\lambda\to-\infty} I_1 = 1$ **(0,25)**

التفسير:

هذه النهاية تعني أن مساحة الحيز المحدد بـ (C_k) و محور التراتيب و (D) تساوي 1. **(0,25)**

3) باستعمال المكاملة بالتجزئة نجد:

$I_k = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}\left(\lambda k e^{\lambda k} - e^{\lambda k}\right)$ **(0,25)**

$\lim_{\lambda\to-\infty} I_k = \frac{1}{k^2}$

$f_1(\alpha) = 0$ معناه $1-\alpha = \alpha e^{\alpha}$

وعليه : $d(N;(D)) = \frac{\alpha e^{\alpha}}{\sqrt{2}}$ **(0,25)**

مديريـــة التربيـــة لولايـــة عين الدفلى	حــــــل نموذجـــــي	المستـوي: 3 رياضي
السنـــة الدراسيـــة:2017/2016	و سلــــم التنقيـــط	المادة :الرياضيات
	الموضوع الثاني	اداة التقويم: الاختبار الثالث

الوحدات	الأجـــــــــوبـــــــــة	التنقيـــــط
الموافقة و التعداد	**التمرين الأول:**	
	I/ b و c هما حلا المعادلة : $x^2-2(2a+3)x+5a^2+4a+5=0$	
	$\Delta=4(-a^2+8a+4)$	0.25
	$\Delta\geq 0$ يكافئ $a\in\left[2-\sqrt{20};2+\sqrt{20}\right]$ ، $a=7$ أو $a=8$	0.50
	$a=7$ فإن $\Delta=11$ (مرفوض)	
	$a=8$ الحلان هما 17 و21. ($a=8$ ، $b=17$ ، $c=21$)	
	II-1/ (أ)- $(x_0;y_0)=(2,2)$.	0.25
	(ب)- $s=\{(17k+2,21k+2),k\in\mathbb{N}\}$.	0.25
	2 – (أ)- $9^{3k+r}\equiv 9^r[3]$.حيث $r\in\{0,1,2\}$.	0.50
	بوقي قسمة 9^n على13 هي 993 1 .	0.50
	(ب) - $3^{34\beta+20}-9^{21\alpha}-2\equiv 9^{21\alpha+2}-9^{21\alpha}-2[13]$	
	$\equiv 0[13]$	0.50
	3-(أ)- $\begin{cases}17\ y=4(21\lambda-2)\\ x=4\lambda\end{cases}$ خسب غوص فإن $y\equiv 0[4]$.	
	(ب)- $x\equiv 0[4]$ يعني $k=4k'+2$	0.50
	$x\equiv 0[8]$ يعني $k=4l+6$	
	$k=4(2l+1)+2$ ، و $k'\neq 2l$ وعليه $k'=2l$.	
	$k=8l+2$.	
	$x=136\ l+36$ و $y=168\ l+44$ حيث $l\in N$.	
		0.25
		2×0.25

الأعداد المركبة	**التمرين الثاني:**		
	1) - أ – محققة .	0.25	
	ب- $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DB})=\frac{\pi}{2}[2\pi]$ **(محققة) .**	0.25	
	2- أ - $z'=\frac{1}{a}iz+1-\frac{1}{a}i$	0.50	
	- ب - $z_{\Omega}=1$ ، $k=\frac{1}{a}$ ، $\theta=\frac{\pi}{2}$	0.75	
	- جـ - $S(A)=B$ ، $S(C)=D$ ، $S(O)=H$ **صورة المثلث** OAC **ب** S **هو المثلث** BHD **و** S **تشابه مباشر ،المثلثان** OAC **و** BHD **متشابهان .**	0.75	
	$S(BHD)=\frac{1}{a^2}S(OAC)$ **.**		
	3 –أ -: $u_{n+1}=\frac{1}{a}u_n$ **.**	0.50	
	(v_n) **متتالية هندسيةأساسها** $q=\frac{1}{a}$ **وحدها الاول** $u_0=\|a-1\|$ **.**		
	ب- $a\in]1;+\infty[$		
	جـ - $T_n=\frac{a\|a-1\|}{a-1}\left[1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+2}\right]$	0.50	
		2× 0.25	
	- 4 (Γ) **دائرة مركزها** A **ذات الاحقة** a		
	وطول نصف قطرها $r=a$	0.50	
		0.50	
		0.50	

الهندسة الفضائية

التمرين الثالث:

0.75

1-المثلث ABC متقايس الاظلاع الان $AB = AC = BC = 3\sqrt{2}$

0.50

2- $\vec{n}(1,1,-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) لان $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n} = 0$.

و $M(x,y;z) \in (ABC)$ معناه : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

معادلة لـ (ABC) : $x + y - z - 4 = 0$

0.25

3- أ – G مركز ثقل المثلث ABC ، و $G(2,4,2)$ . ...

0.25

ب - $M(x,y;z) \in (\Delta)$ يكافئ $(k \in R)$ $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 4 + k \\ z = 2 - k \end{cases}$

0.25

جـ - لاحظ أن S نقطة من (Δ)

$AS^2 = AB^2$ يكافئ $3t^2 = 12$ حيث $t \in \{-2,2\}$ ومنه $S(4;6;0)$ أو $S(0;2;4)$

0.25

د – F تنتمي الى (Δ) ومنه المثلثات FGA ، FGB ، FGC قائمة ومتقايسة لان

$GA = GB = GC$ ومنه $FA = FB = FC = AB$.

رباعي الوجوه $FABC$ منتظم . $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \times FG$ و

$V = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times FG$ ....

0.25

لاحظ : $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB^2 \sin(\frac{\pi}{3})$ و منه $V = 9u.v$.

0.25

4- $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{BC} = 0$ ومنه (FA) و (BC) متعامدان.

5 أ - $\left\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MF}\right\| = 6$ تكافئ $MI = 3$ حيث I منتصف $[FG]$.

المجموعة (S) هي سطح الكرة التي مركزها I وطول نصف قطرها 3.

ب – بمأن $I \in (\Delta)$ فإن : $IG = d(AB,I) = \sqrt{3}$.

0.25

المجموعة (S) **والمستوي** (ABC) يتقاطعان في دائرة مركزه G

وطول نصف قطرها $r = \sqrt{6}$.

0.25

متوسط المثلث متقايس الاظلاع ABC يساوي $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ وعليه $AG = \frac{2}{3}\left(\frac{2\sqrt{6}}{2}\right) = \sqrt{6}$

0.25

المجموعة (S) **والمستوي** (ABC) يتقاطعان في دائرة محيطة بالمثلث ABC .

<u>التمرين الرابع :</u>

I- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}=1$ الدالة " $\ln$ " قابلة للاشتقاق عند1 وعليه $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$. 0.50

بوضع $z=x-1$ فإن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(z+1)}{z}=1$.

II 1–أ –محققة من أجل $x\geq1$ 0.25

ب– محققة من أجل $x\geq1$. 0.25

جـ – $\lim\limits_{x\to1}\left[\dfrac{\ln x}{x-1}+\dfrac{\ln\left[1+\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}\right]}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}+\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right]=+\infty$.

المنحى (C_f) يقبل نصف مماس موازي لمحور التراتيب عند النفطة التي فاصلتها 1. 0.25

<u>2</u>– أ / $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 0.25

ب / $f^{/}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 0.25

0.50

x	1 $+\infty$
$f^{/}(x)$	+
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

جـ/ البيان : 0.50

0.50

لدالة الأسية و اللوغار

0.25	**ب / المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس** $(o,\vec{i};\vec{j})$ **فإن** (C_f) **و** (C_g) **متناظران بالنسبةالى المنصف الاول (** (Δ) **:** $y=x$ **)**	
01	**3 أ /** $S' = \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})}\left[3-g(x)\right]d(x)$	
	$S' = \left[3x\right]_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)d(x)$	
	$S' = 6\ln(1+\sqrt{2}) - \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)d(x)$	
	ب/ $\int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} g(x)d(x) = \int_0^{2\ln(1+\sqrt{2})} \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right]d(x)$	
	$= \frac{1}{2}\left[e^x + e^{-x}\right]_0^{2\ln(1+}$	
	$= 2\sqrt{2}$	
	بمأن (C_f) **و** (C_g) **متناظران بالنسبةالى المنصف الاول** $\Delta = \Delta'$ **ومنه** $S = S'$	
0.50	$S = S' = \left[6\ln(1+\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}\right]\ u.v$	
0.25		
0.50		

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لشرق ولاية الجزائر — **ثانوية قهواجي بوعلام- بوروبة - الحراش**
امتحان تجريبي لشهادة البكالوريا — **دورة: جوان 2015**
الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة: الرياضيات — **المدة: 03 ساعات و 30د**

على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي: $f(x)=\frac{3x-1}{2x}$، و ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\ \vec{i},\vec{j})$.

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم أنشئ المنحنى (C)
2. (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$
   أ. مثل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 على محور الفواصل مبرزا خطوط الإنشاء
   ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>1$
   ج. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج؟
3. أ. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}(u_n-1)$
   ب. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n-1\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)
4. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}$
   أ. بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ثم أكتب عبارة S_n بدلالة n.
   ج. أحسب المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{v_0-1}{u_0}+\frac{v_1-1}{u_1}+\frac{v_2-1}{u_2}+\cdots+\frac{v_n-1}{u_n}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k})$. نعتبر النقط $A(3;0;0)$، $B(0;6;0)$، $C(0;0;4)$ و $D(-5;0;1)$

1. أ. تحقق أن الشعاع $\vec{n}(4;2;3)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)
   ب. عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)
2. أ. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D و يعامد المستوي (ABC)
   ب. استنتج إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (AB)
   ج. أحسب المسافة بين النقطة D و المستوي (AB)
3. نعتبر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق: $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=0$
   أ. عين طبيعة و عناصر المجموعة (E) ثم أكتب معادلة ديكارتية لها.

ب. تحقق أن النقطة H تنتمي إلى المجموعة (E)

التمرين الثالث: (04.5 نقطة)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\ \vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=-\sqrt{3}-i$ ، $z_B=1-\sqrt{3}i$ ، $z_C=\sqrt{3}+i$ و $z_D=-1+\sqrt{3}i$ على الترتيب.

1. أ. أنشئ النقط A، B، C و D

ب. أكتب كلا من z_A، z_B، z_C و z_D على الشكل الأسي.

ج. عين طبيعة الرباعي $ABCD$

2. ليكن r الدوران الذي مركزه B و زاويته $-\frac{\pi}{3}$، و لتكن E و F صورتا النقطتين A و B على الترتيب بالدوران

أ. أكتب العبارة المركبة للدوران r

ب. أحسب لاحقتي النقطتين E و F

3. لتكن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي و التي تحقق: $(z-\sqrt{3}-i)(\bar{z}-\sqrt{3}+i)=4$

عين طبيعة و عناصر المجموعة (Γ)

التمرين الرابع: (06.5 نقطة)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+1+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\ \vec{i},\vec{j})$.

1. أ. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها و فسر النتائج بيانيا.

ب. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

3. بين أن النقطة $\Omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

4. أنشئ المنحنى (C_f)

5. أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب التكامل $\int_2^3 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$

ب. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين ذوا المعادلتين: $x=2$ و $x=3$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\ \vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A(1;4;-5)$، $B(3;2;-4)$، $C(5;4;-3)$ و $D(-2;8;4)$ و الشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$

1. بين أن معادلة المستوي (ABC) هي: $x-2z-11=0$
2. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة D و $\vec{u}$ شعاع توجيه له.
3. ليكن $(\wp)$ المستوي ذو المعادلة: $x-y-z-7=0$

أ. أثبت أن المستويين $(\wp)$ و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.

ب. أثبت أن المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

4. لتكن $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$ نقطتين من الفضاء

أ. تحقق أن F نقطة من (T) و E نقطة من (Δ)

ب. بين أن المستقيم (EF) عمودي على كل من (Δ) و (T)

5. لتكن (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

أ. أوجد بدلالة α معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ) ثم استنتج أن (Γ) مستو حيث $\overrightarrow{FE}$ شعاع ناظمي له.

ب. عين قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:

$$2z^2+8\sin\alpha\, z+5-3\cos(2\alpha)=0$$

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\ \vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A=2$ ، $z_B=2\sqrt{3}+2i$ ، $z_C=-2\sqrt{3}+2i$ و $z_D=-2$ على الترتيب.

أ. أنشئ النقط A، B، C و D

ب. أكتب العددين z_B و z_C على الشكل الأسي.

ج. عين طبيعة الرباعي $ABCD$

د. أكتب العدد المركب $\left(\frac{z_B}{4}\right)^{2015}+\left(\frac{z_C}{4}\right)^{1436}$ على الشكل الجبري.

3. عين طبيعة (d) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z|=|z-2|$
4. نرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z (حيث $z\neq z_A$) النقطة M' ذات اللاحقة z' بحيث:

$$z'=\frac{-4}{z-2}$$

أ. بين أنه من أجل كل عدد مركب $z\neq 2$ فإن: $|z'-2|=\frac{2|z|}{|z-2|}$

ب. بين أنه إذا كانت M نقطة من المجموعة (d) فإن M' تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها و طول نصف قطرها.

التمرين الثالث: (03.5 نقطة)

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \int_n^{n+1} e^{-x+1} dx$

1. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$
2. أ. أكتب عبارة v_n بدلالة n.

ب. بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

3. ليكن S_n المجموع المعرف كما يلي: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

أ. أحسب S_n بدلالة n

ب. بين أن $S_n = \int_0^{n+1} e^{-x+1} dx$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

1. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
2. استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x

II. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 2cm)

1. أحسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة O
5. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثييها.
6. أنشئ المستقيمين (T) و(Δ) و المنحنى (C_f)
7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$(2x-1)e^{2x} + x = x + m + 1$$

8. أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب التكامل $\int_0^1 (2x-1)e^{2x} dx$

ب. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيمين ذوا المعادلتين: $x = 0$ و $x = 1$

التصحيح النموذجي للامتحان التجريبي الأول

الموضوع الأول:

التمرين الاول (05 نقاط)

لدينا: $f(x)=\frac{3x-1}{2x}$، حيث $D_f=\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$

1. **دراسة اتجاه تغير الدالة:**

لدينا من أجل كل x من $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$: $f'(x)=\frac{2}{4x^2}$، و منه $f'(x)>0$ على المجال $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ و لدينا

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{3}{2}$

و بالتالي المنحنى الممثل للدالة f يكون كما هو مبين في الشكل

2. نعتبر الآن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0=2$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=f(u_n)$

أ. **تمثيل الحدود u_3،u_2، u_1،u_0 على محور الفواصل:**

لتمثيل الحدود على محور الفواصل نستعمل المنحنى (C) الممثل للدالة f و المنصف الأول $y=x$ كما هو ممثل في الشكل المقابل.

ب. **البرهان بالتراجع أنه من أجل $n\in\mathbb{N}$: $u_n>1$**

- من أجل $n=0$ لدينا $u_0=2$ و منه $u_0>1$
- نفرض أن $u_n>1$ و نبين أن $u_{n+1}>1$.

لدينا $u_n>1$ و بما أن f مستمرة و متزايدة تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ فإن $f(u_n)>f(1)$ أي أن $u_{n+1}>1$

إذن من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>1$

ج. **بيان أن (u_n) متناقصة تماما:**

الطريقة الأولى: لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-1}{2u_n}-u_n=\frac{-2u_n{}^2+3u_n-1}{2u_n}=\frac{(u_n-1)(-2u_n+1)}{2u_n}$

وبما أن $u_n-1>0$ و $-2u_n+1<0$ و $u_n>0$ فإن $u_{n+1}-u_n<0$

و منه فالمتتالية (u_n) متناقصة تماما.

الطريقة الثانية: نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}<u_n$

- من أجل $n=0$ لدينا: $u_0=2$ و $u_1=\frac{5}{2}$ و منه $u_1<u_0$
- نفرض أن $u_{n+1}<u_n$ و نبين أن $u_{n+2}<u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1}<u_n$ و بما أن الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ فإن $f(u_{n+1})<f(u_n)$ و بالتالي $u_{n+2}<u_{n+1}$. إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

الإستنتاج: بما أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد 1 فإن (u_n) متقاربة.

3. أ. **إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n:** $u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}(u_n-1)$

لدينا من جهة: $u_{n+1}-1=\frac{3u_n-1}{2u_n}-1=\frac{u_n-1}{2u_n}=\frac{1}{2u_n}(u_n-1)$

و من جهة أخرى لدينا: $u_n>1$ أي أن $2u_n>2$ و منه $\frac{1}{2u_n}<\frac{1}{2}$ و بالتالي $\frac{1}{2u_n}(u_n-1)<\frac{1}{2}(u_n-1)$ لأن $u_n-1>0$ و منه نستنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}(u_n-1)$

ب. **بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n:** $u_n-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا: $\begin{cases}u_n-1\le\frac{1}{2}(u_{n-1}-1)\\u_{n-1}-1\le\frac{1}{2}(u_{n-2}-1)\\\vdots\\u_1-1\le\frac{1}{2}(u_0-1)\end{cases}$ بضرب أطراف المتباينات طرفا لطرف و بعد اختزال العوامل المتساوية

نجد: $u_n-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^n(u_0-1)$ و بما أن $u_0=2$ فإن $u_n-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ و منه $\lim_{x\to+\infty}u_n-1=0$ أي أن $\lim_{x\to+\infty}u_n=1$

4. نعتبر الآن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}$

أ. **بيان أن المتتالية (v_n) هندسية:**

لدينا: $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1}=\frac{\frac{3u_n-1}{2u_n}-1}{2\frac{3u_n-1}{2u_n}-1}=\frac{u_n-1}{4u_{n+1}-2}=\frac{1}{2}v_n$ و منه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول

$v_0=\frac{1}{3}$

إذن: $v_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ب. **حساب المجموع S_n:** لدينا: $S_n=\frac{v_0-1}{u_0}+\frac{v_1-1}{u_1}+\frac{v_2-1}{u_2}+\cdots+\frac{v_n-1}{u_n}$ و لكن $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}$ أي أن

$u_n=\frac{v_n-1}{2v_n-1}$

و منه $S_n=\frac{v_0-1}{\frac{v_0-1}{2v_0-1}}+\frac{v_1-1}{\frac{v_1-1}{2v_1-1}}+\frac{v_2-1}{\frac{v_2-1}{2v_2-1}}+\cdots+\frac{v_n-1}{\frac{v_n-1}{2v_n-1}}$ أي $S_n=2v_0-1+2v_1-1+\cdots+2v_n-1$

و منه $S_n=2(v_0+v_1+\cdots+v_n)-(n+1)$ إذن $S_n=\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]-(n+1)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1. أ. **بيان أن الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوى (ABC)**

لدينا $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$ و $\overrightarrow{AC}(-3;0;4)$ و لدينا: $\vec{n}.\overrightarrow{AB}=-12+12=0$ و $\vec{n}.\overrightarrow{AC}=-12+12=0$

و بالتالي: $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$. إذن $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

ب. **كتابة معادلة للمستوى (ABC)**

لدينا من أجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستوي (ABC): $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ و بالتالي فمعادلة المستوي (ABC) هي: $4x+2y+3z-12=0$

2. أ. **كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم** (Δ)

بما أن (Δ) يعامد المستوي (ABC) فإن الشعاع $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و بالتالي تمثيله االوسيطي هو:

$$\begin{cases}x=-5+4t\\y=2t\\z=1+3t\end{cases};t\in\mathbb{R}$$

ب. **استنتاج إحداثيات النقطة H**

النقطة H هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC). و منه: $4(-5+4t)+2(2t)+3(1+3t)-12=0$

إذن $t=1$ و بالتالي $H(-1;2;4)$

ج. **حساب المسافة بين D و (ABC)**

$d(D;(ABC))=DH=\sqrt{29}$

3. أ. **تعيين طبيعة و عناصر المجموعة** (E)

لدينا: المجموعة (E) معرفة بالعلاقة $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA}=0$ و منه فالمجموعة (E) هي سطح كرة قطره AD، و لكتابة معادلة ديكارتية

لها نقوم بتعيين المركز Ω الذي يمثل منتصف القطعة $[AD]$ أي أن $\Omega\left(-1;0;\frac{1}{2}\right)$ و نصف القطر هو

$r=\frac{AD}{2}=\frac{\sqrt{65}}{2}$

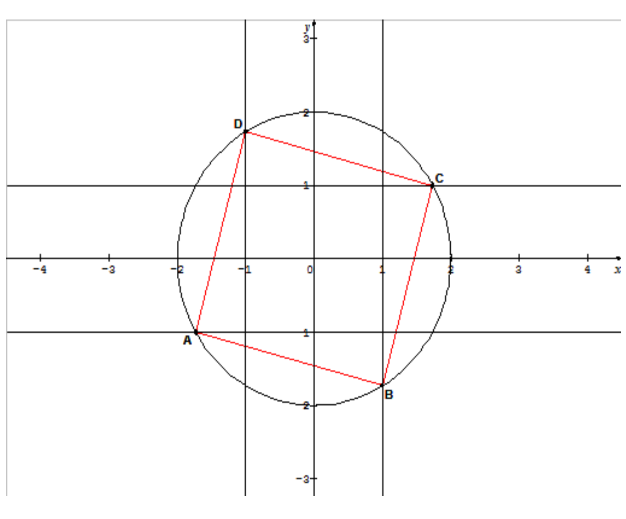
إذن: $(E):(x+1)^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{65}{4}$

ب. **التحقق أن النقطة H تنتمي إلى المجموعة** (E)

نعوض إحداثيات النقطة H في معادلة سطح الكرة فنجد: $(-1+1)^2+2^2+\left(4-\frac{1}{2}\right)^2=4+\frac{49}{4}=\frac{65}{4}$

إذن: $H\in(E)$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)



.1 أ. **إنشاء النقط A، B، C و D**

لإنشاء النقط A، B، C و D نقوم باستعمال المدور و المسطرة كما هو مبين في الشكل المقابل. فمثلا لإنشاء النقطة A نقوم بإنشاء الدائرة التي مركزها O و طول نصف قطرها 2 ثم نقوم برسم المستقيم و المعادلة $y=-1$ فيتقاطع هذا المستقيم مع الدائرة في نقطتين و نقطة التقاطع ذات الفاصلة السالبة هي النقطة A و نقوم بالمثل لإنشاء النقط المتبقية.

ب. **كتابة كل من z_A، z_B، z_C و z_D على الشكل الأسي**

لدينا $|z_A|=2$ و $\arg(z_A)=\frac{7\pi}{6}$ أي $z_A=2e^{i\frac{7\pi}{6}}$

و $|z_B|=2$ و $\arg(z_B)=-\frac{\pi}{3}$ أي $z_B=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

و $|z_C|=2$ و $\arg(z_C)=\frac{\pi}{6}$ أي $z_C=2e^{i\frac{\pi}{6}}$ و $|z_D|=2$ و $\arg(z_D)=\frac{2\pi}{3}$ أي $z_D=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

ج. **تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$**

لدينا: $z_B-z_A=(\sqrt{3}+1)+(1-\sqrt{3})i$ و $z_C-z_D=(\sqrt{3}+1)+(1-\sqrt{3})i$ و منه: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

و لدينا أيضا: $|z_B-z_A|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ و $|z_D-z_A|=2\sqrt{2}$ و منه: $AB=AD$

و لدينا كذلك: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+1\\1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-1\\\sqrt{3}+1\end{pmatrix}$ و منه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$ أي أن $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$.

بما أن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $AB=AD$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$. فإن الرباعي $ABCD$ مربع.

.2 أ. **العبارة المركبة للدوران r :**

لدينا: $z'-z_B=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-z_B)$ و منه: $z'=e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-z_B)+z_B$ إذن: $z'=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z+2$

ب. **حساب لاحقتي النقطتين E و F**

لدينا: $z_E=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_A+2$ و منه: $z_E=(2-\sqrt{3})+i$ وبما أن النقطة B هي مركز الدوران فإن B نقطة صامدة أي أن صورتها هي نفسها و منه $z_F=z_B$.

.3 **تعيين طبيعة و عناصر المجموعة (Γ)**

لدينا $(z-\sqrt{3}-i)(\bar{z}-\sqrt{3}+i)=4$ أي $\left(z-(\sqrt{3}+i)\right)\left(\overline{z-(\sqrt{3}+i)}\right)=4$

ومنه: $\left|\left(z-(\sqrt{3}+i)\right)\left(\overline{z-(\sqrt{3}+i)}\right)\right|=4$ أي $\left|z-(\sqrt{3}+i)\right|\left|\overline{z-(\sqrt{3}+i)}\right|=4$ و نعلم أن $|Z|=$

$|\bar{Z}|$ و منه: $\left|z-(\sqrt{3}+i)\right|^2=4$ أي أن $|z-z_C|=2$ و منه (Γ) هي دائرة مركزها C و طول نصف قطرها 2.

التمرين الرابع: (04.5 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=x+1+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

.1 أ. حساب نهايات الدالة f

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0$ و $\lim_{x\to-\infty}x+1=-\infty$

$\lim_{\substack{<\\x\to-1}}f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{\substack{<\\x\to-1}}\frac{x+1}{x-1}=0$ و منه $\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\infty$

إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=-1$

$\lim_{\substack{>\\x\to1}}f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{\substack{>\\x\to1}}x+1=2$ و $\lim_{\substack{>\\x\to1}}x-1=0^+$ و بالتالي: $\lim_{\substack{>\\x\to1}}\frac{x+1}{x-1}=+\infty$ أي أن

$\lim_{\substack{>\\x\to1}}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$

إذن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=1$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0$ و $\lim_{x\to+\infty}x+1=+\infty$

ب. دراسة اتجاه تغير الدالة f

من أجل كل x من المجال $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$: $f'(x)=1-\frac{3}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2-1-3}{(x-1)(x+1)}$

أي: $f'(x)=\frac{x^2-4}{(x-1)(x+1)}$

إذن، $f'(x)=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$.
بما أن $(x-1)(x+1)>0$
على المجال $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x-2)(x+2)$ و يكون جدول التغيرات كالتالي:

x	$-\infty$		-2		-1	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	‖	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2,6	↘	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	↘	4,6	↗	$+\infty$

2. أ. بين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f)

لدينا $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)-(x+1)=0$ و منه المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ و $+\infty$

ب. دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ)

لدينا: $f(x)-(x+1)=\frac{3}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ و منه إشارة الفرق من إشارة $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

- إذا كان $x>1$ فإن $\frac{x+1}{x-1}>1$ أي $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0$ و منه في هذه الحالة (C_f) يقع فوق (Δ)
- إذا كان $x<-1$ فإن $0<\frac{x+1}{x-1}<1$ أي $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)<0$ و منه في هذه الحالة (C_f) يقع تحت (Δ)

3. بيان أن النقطة $\Omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

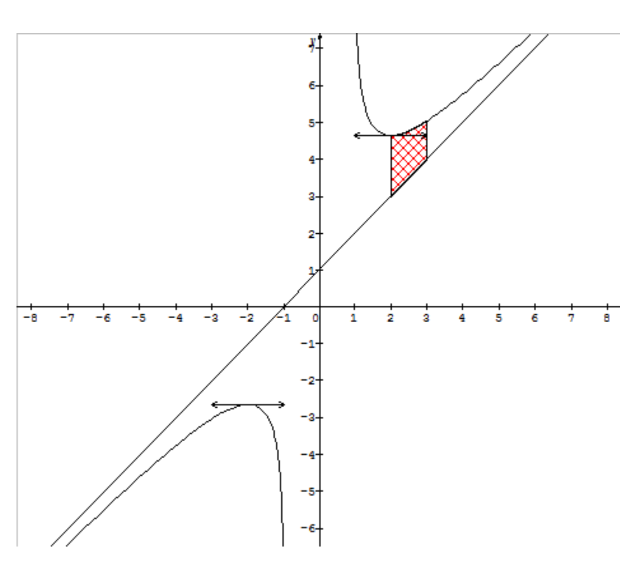
نبين أن $f(-x)+f(x)=2$. لدينا $f(-x)=-x+1+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)=-x+1+\frac{3}{2}\ln\left[\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right]$

إذن: $f(-x)=-x+1+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

و منه: $f(-x)+f(x)=-x+1+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+x+1+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=2+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\times\frac{x+1}{x-1}\right)=2$

إذن النقطة $\Omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

4. إنشاء المنحنى (C_f)



5. أ. حساب التكامل $\int_2^3\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$

$$\int_2^3\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=\int_2^3\ln(x+1)\,dx-\int_2^3\ln(x-1)\,dx$$

نقوم بحساب التكامل $\int_2^3\ln(x+1)\,dx$ بالتجزئة:

نضع: $u(x)=\ln(x+1)$ و منه $u'(x)=\frac{1}{x+1}$

و $v'(x)=1$ و منه $v(x)=x$

و بالتالي: $\int_2^3\ln(x+1)\,dx=[x\ln(x+1)]_2^3-\int_2^3\frac{x}{x+1}dx$

أي: $\int_2^3\ln(x+1)\,dx=[x\ln(x+1)]_2^3-\int_2^3 1-\frac{1}{x+1}dx$

و منه:

$$\int_2^3\ln(x+1)\,dx=[x\ln(x+1)]_2^3-[x-\ln(x+1)]_2^3$$

إذن: $\int_2^3\ln(x+1)\,dx=4\ln 4-3\ln 3-1$

و بنفس الطريقة نقوم بحساب $\int_2^3\ln(x-1)\,dx$ فنجد: $\int_2^3\ln(x-1)\,dx=2\ln 2-1$

إذن: $\int_2^3\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=4\ln 4-3\ln 3-2\ln 2=\ln\left(\frac{64}{27}\right)$

ب. حساب المساحة

$$S=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 x+1+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=$$

$$\int_2^3(x+1)dx+\frac{3}{2}\int_2^3\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_2^3+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{64}{27}\right)$$

إذن: $S=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{64}{27}\right)\ u.a$

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

1. بيان أن معادلة المستوي (ABC) هي: $x-2z-11=0$

نعوض إحداثيات النقط A، B و C في المعادلة فنجد: $1+10-11=0$ و $3+8-11=0$ و $5+6-11=0$

و منه معادلة المستوي (ABC) هي: $x-2z-11=0$

2. **كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (T)**

$$(T):\begin{cases} x=-2+t \\ y=8+5t \\ z=4-t \end{cases} \quad ; t\in\mathbb{R}$$

3. أ. إثبات أن المستويين $(\wp)$ و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

لدينا: $\vec{n}_{(ABC)}(1;0;-2)$ و $\vec{n}_{(\wp)}(1;-1;-1)$ و بما أن $\frac{1}{1}\neq\frac{-1}{-2}$ فإن الشعاعين $\vec{n}_{(\wp)}$ و $\vec{n}_{(ABC)}$ ليسا مرتبطين خطيا و منه فالمستويان $(\wp)$ و (ABC) يتقاطعان في مستقيم (Δ).

و لدينا: $\begin{cases} x-y-z-7=0 \\ x-2z-11=0 \end{cases}$ و بوضع $z=\lambda$ نجد: $\begin{cases} x-y-\lambda-7=0 \\ x-2\lambda-11=0 \end{cases}$ ثم حل هذه الجملة نجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) كما يلي: $(\Delta):\begin{cases} x=11+2\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad ; \lambda\in\mathbb{R}$

ب. أثبت أن المستقيمين (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

يكون المستقيمان (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي إذا كان شعاعا توجيههما غير مرتبطين خطيا و لم يكن لهما نقطة مشتركة

لدينا $\vec{u}(1;5;-1)$ و $\vec{u}_{(\Delta)}(2;1;1)$ و بما أن $\frac{1}{5}\neq\frac{1}{2}$ فإن الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{u}_{(\Delta)}$ غير مرتبطين خطيا.

و لدينا من جهة أخرى: $\begin{cases} -2+t=11+2\lambda \\ 4-t=\lambda \end{cases}$ و منه $\begin{cases} t=7 \\ \lambda=-3 \end{cases}$ و بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي للمستقيم (T) و قيمة λ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد: $\mathrm{H}_{(\Delta)}(5;43;-3)$ و $\mathrm{H}_{(\Delta)}(5;1;-3)$ و منه لا توجد نقطة مشتركة بين المستقيمين (T) و (Δ). إذن: المستقيمان ليسا من نفس المستوي.

4. نعتبر الآن النقطتين $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$

أ. التحقق أن F نقطة من (T) و E نقطة من (Δ)

نقوم بتعويض إحداثيات F في التمثيل الوسيطي للمستقيم (T) نجد $\begin{cases} -3=-2+t \\ 3=8+5t \\ 5=4-t \end{cases}$ و منه: $\begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}$ و بالتالي: $F\in(T)$

نقوم بتعويض إحداثيات E في التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) نجد $\begin{cases} 3=11+2\lambda \\ 0=4+\lambda \\ -4=\lambda \end{cases}$ و منه: $\begin{cases} \lambda=-4 \\ \lambda=-4 \\ \lambda=-4 \end{cases}$ و بالتالي: $E\in(\Delta)$

ب. بيان أن المستقيم (EF) عمودي على كل من (T) و (Δ)

لدينا : $\overrightarrow{EF}(-6;3;9)$ و $\vec{u}(1;5;-1)$ و $\vec{u}_{(\Delta)}(2;1;1)$ و بما أن: $\overrightarrow{EF}.\vec{u}=0$ و $\overrightarrow{EF}.\vec{u}_{(\Delta)}=0$

و بالتالي: $(EF)\perp(T)$ و $(EF)\perp(\Delta)$

5. نعتبر (Γ) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

أ. تعيين معادلة ديكارتية للمجموعة (Γ)

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء و منه: $\overrightarrow{ME}(3-x;-y;-4-z)$ و لدينا: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ و بالتالي نجد معادلة للمجموعة (Γ) كما يلي: $6x-3y-9z-54+\alpha=0$ و هي معادلة لمستو لأن معاملات كل من x و y و z لا تنعدم في آن واحد شعاعه الناظمي هو $\overrightarrow{FE}(6;-3;-9)$

ب. تعيين قيمة α حتى يكون (Γ) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$

(Γ) هو المستوي المحوري للقطعة $[FE]$ معناه أن (Γ) عمودي على القطعة $[FE]$ في النقطة $I\left(0;\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ منتصفها.

لدينا: $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ و منه $(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IE}).\overrightarrow{FE}=\alpha$ أي $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{FE}=\alpha$ و بالتالي: $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{FE}=$

α و لكن: $\overrightarrow{IE}\left(3;-\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right)$ و منه : $\alpha=83$

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

1. حل المعادلة: $2z^2+8\sin\alpha\, z+5-3\cos(2\alpha)=0$

لدينا: $\Delta'=16\sin^2\alpha-2[5-3\cos(2\alpha)]$ و منه $\Delta'=16\sin^2\alpha-10+6\cos(2\alpha)$

أي: $\Delta'=16\sin^2\alpha-10+6[\cos^2\alpha-\sin^2\alpha]$ إذن: $\Delta'=10\sin^2\alpha-10+6\cos^2\alpha$

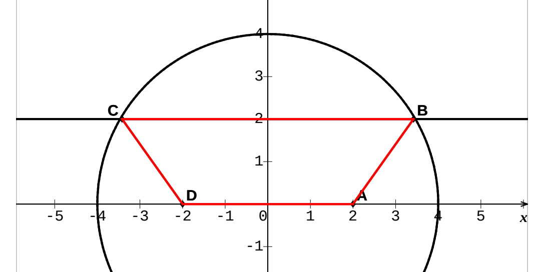
و منه $\Delta'=4\sin^2\alpha+6\sin^2\alpha-10+6\cos^2\alpha$ أي $\Delta'=4\sin^2\alpha-10+6(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

و بالتالي: $\Delta'=4\sin^2\alpha-4$ أي: $\Delta'=4(\sin^2\alpha-1)$ و لكن: $1=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$

و منه: $\Delta'=4(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$ إذن: $\Delta'=-4\cos^2\alpha$ أي: $\Delta'=(2i\cos\alpha)^2$

و بالتالي: حلول المعادلة هي: $z_1=-2\sin\alpha-i\cos\alpha$ و $z_2=-2\sin\alpha+i\cos\alpha$

2. أ. تمثيل النقط A، B، C و D



يكون الإنشاء كما هو مبين في الشكل المقابل.

ب. كتابة العددين z_B و z_C على الشكل الأسي.

لدينا $|z_B|=4$ و $\arg(z_B)=\frac{\pi}{6}$ و منه: $z_B=4e^{i\frac{\pi}{6}}$

و $|z_C|=4$ و $\arg(z_C)=-\frac{\pi}{6}$ و منه: $z_C=4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ج. تعيين طبيعة الرباعي $ABCD$

لدينا: $\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}=\frac{-2\sqrt{3}+2i-2\sqrt{3}-2i}{-2-2}=\sqrt{3}$ و منه $\left|\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}\right|\neq 1$

و $\arg\left(\frac{z_C-z_B}{z_D-z_A}\right)=0$ و بالتالي فالرباعي $ABCD$ شبه منحرف.

د. كتابة العدد المركب $\left(\frac{z_B}{4}\right)^{2015}+\left(\frac{z_C}{4}\right)^{1436}$ على الشكل الجبري

لدينا: $\left(\frac{z_B}{4}\right)^{2015}+\left(\frac{z_C}{4}\right)^{1436}=\left(\frac{4e^{i\frac{\pi}{6}}}{4}\right)^{2015}+\left(\frac{4e^{-i\frac{\pi}{6}}}{4}\right)^{1436}=e^{i2015\frac{\pi}{6}}+e^{-i1436\frac{\pi}{6}}$

ومنه: $\left(\frac{z_B}{4}\right)^{2015}+\left(\frac{z_C}{4}\right)^{1436}=e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}$ إذن: $\left(\frac{z_B}{4}\right)^{2015}+\left(\frac{z_C}{4}\right)^{1436}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i$

3. تعيين طبيعة المجموعة (d)

لدينا $|z|=|z-2|$ و منه $|z|=|z-z_A|$ أي : $MO=MA$ و بالتالي فمجموعة النقط (d) هي محور القطعة المستقيمة $[OA]$

4. لدينا: $z'=\frac{-4}{z-2}$

أ. بيان أنه من أجل كل عدد مركب $z\neq 2$ فإن: $|z'-2|=\frac{2|z|}{|z-2|}$

لدينا: $z'=\frac{-4}{z-2}$ و منه: $z'-2=\frac{-4}{z-2}-2$ أي $z'-2=\frac{-2z}{z-2}$ و بالتالي: $|z'-2|=\left|\frac{-2z}{z-2}\right|$ أي:

$|z'-2|=\frac{|-2||z|}{|z-2|}$

إذن: $|z'-2|=\frac{2|z|}{|z-2|}$

ب. بين أنه إذا كانت M نقطة من المجموعة (d) فإن M' تنتمي إلى دائرة

لدينا من أجل كل عدد مركب $z\neq 2$: $|z'-2|=\frac{2|z|}{|z-2|}$ و بما أن: M نقطة من المجموعة (d) فإن:

$|z|=|z-2|$

و منه: $|z'-2|=\frac{2|z-2|}{|z-2|}$ أي $|z'-2|=2$ إذن: $|z'-z_A|=2$ أي $M'A=2$

و منه: فالنقطة M' تتحرك على دائرة مركزها النقطة A و طول نصف قطرها 2

التمرين الثالث: (03.5 نقطة)

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=\int_n^{n+1}e^{-x+1}dx$

1. بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n>0$

نعلم أنه إذا كانت $f(x)>0$ من أجل كل x من المجال $[a;b]$ فإن $\int_a^b f(x)\,dx>0$ و بما أن: $e^{-x+1}>0$

فإن: $\int_n^{n+1} e^{-x+1}dx > 0$ و منه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n > 0$

2. أ. كتابة عبارة v_n بدلالة n

لدينا: $v_n = \int_n^{n+1} e^{-x+1}dx = [-e^{-x+1}]_n^{n+1} = -e^{-n} + e^{-n+1}$ إذن: $v_n = e^{-n}(e-1)$

ب. بيان أن المتتالية (v_n) هندسية:

لدينا: $v_{n+1} = e^{-n+1}(e-1) = e \times e^{-n}(e-1)$ و منه: $v_{n+1} = ev_n$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها e و حدها الأول $v_0 = e-1$

3. نعتبر المجموع S_n المعرف كما يلي: $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

أ. حساب المجموع S_n:

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = (e-1) \times \frac{1-e^{n+1}}{1-e}$ و منه: $S_n = e^{n+1} - 1$

ب. بيان أن $S_n = \int_0^{n+1} e^{-x+1}dx$

نعلم أن: $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$ و بما أن $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

أي: $S_n = \int_0^1 e^{-x+1}dx + \int_1^2 e^{-x+1}dx + \int_2^3 e^{-x+1}dx \ldots + \int_n^{n+1} e^{-x+1}dx$

و منه حسب الخاصية المذكورة أعلاه (علاقة شال) فإن $S_n = \int_0^{n+1} e^{-x+1}dx$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

1. دراسة تغيرات الدالة g

أ. حساب النهايات:

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$ لأن: $\lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0$ ، و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

ب. حساب المشتقة:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = 4e^{2x}(2x+1)$

بما أن $4e^{2x} > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2x+1)$

ج. جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $\qquad$ $-1/2$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$g(x)$	1 ↘ $1+2e^{-1}$ ↗ $+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$

بما أن $1 + 2e^{-1} > 0$ فإن $g(x) > 0$ من أجل كل عدد حقيقي x

II. نعتبر الآن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$

1. حساب النهايات

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1 = -\infty$ لأن: $\lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x\to+\infty} (2x-1) = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = 4xe^{2x} + 1 = g(x)$ و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي أن $f'(x) > 0$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3. أ. بيان أن (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

لدينا : $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1) = \lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} = 0$ و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

لدينا: $f(x) - y = (2x-1)e^{2x}$ و منه إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة $(2x-1)$

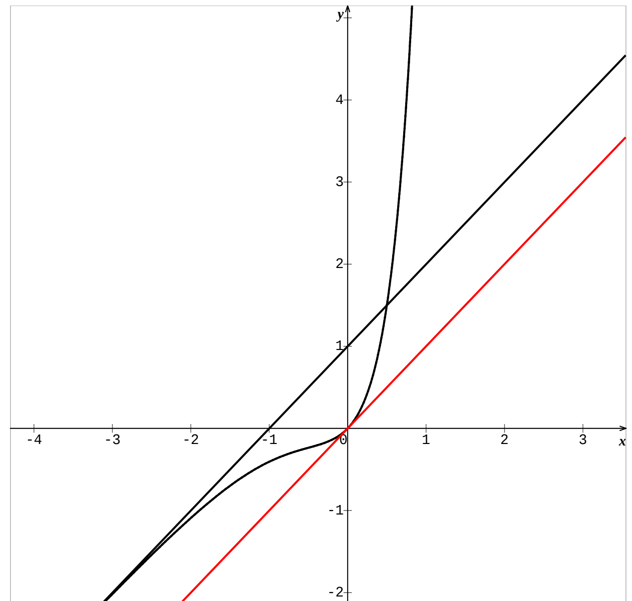
- إذا كان $x < \frac{1}{2}$ فإن: (C_f) يقع تحت (Δ)
- إذا كان $x = \frac{1}{2}$ فإن: (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الإحداثيين $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$
- إذا كان $x > \frac{1}{2}$ فإن: (C_f) يقع فوق (Δ)

4. كتابة معادلة المماس عند النقطة O: $(T): y = x$

5. بيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''(x) = g'(x) = 4e^{2x}(2x+1)$ و بالتالي نلاحظ من جدول إشارة $g'(x)$ أنها تنعدم عند $-\frac{1}{2}$ مغيرة إشارتها و بالتالي فالمنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف إحداثياها $\left(-\frac{1}{2};-\frac{2}{e}+\frac{1}{2}\right)$

6. إنشاء المستقيمين (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)



7. المناقشة البيانية:

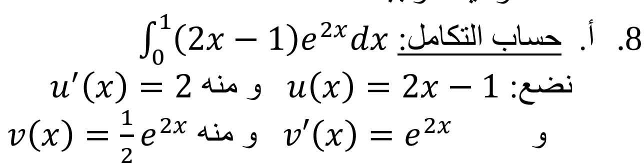
لدينا: $(2x-1)e^{2x} + x = x + m + 1$

بإضافة 1 إلى الطرفين نجد:

$(2x-1)e^{2x} + x + 1 = x + m + 2$

أي $f(x) = x + m + 2$

- إذا كان $m + 2 < 0$ أي $m < -2$ فإن المعادلة لا تقبل حلول
- إذا كان $m + 2 = 0$ أي $m = -2$ فإن المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما.
- إذا كان $0 < m + 2 < 1$ أي $-2 < m < -1$ فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة
- إذا $m + 2 \geq 1$ أي $m \geq -1$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا



8. أ. حساب التكامل: $\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx$

نضع: $u(x) = 2x - 1$ و منه $u'(x) = 2$

و $v'(x) = e^{2x}$ و منه $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

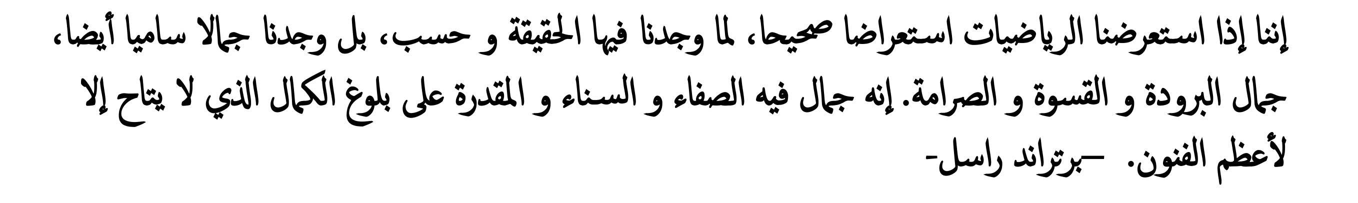
و منه: $\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}dx = \left[\frac{1}{2}(2x-1)e^{2x}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$

و بالتالي: $\int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx = 1$:

ب. حساب المساحة:

$S = \int_0^1 f(x) - x\,dx = \int_0^1 (2x-1)e^{2x} + 1\,dx = \int_0^1 (2x-1)e^{2x}dx + \int_0^1 dx = 1 + [x]_0^1$

إذن: $S = 2\,u.a$



إننا إذا استعرضنا الرياضيات استعراضا صحيحا، لما وجدنا فيها الحقيقة و حسب، بل وجدنا جمالا ساميا أيضا، جمال البرودة و القسوة و الصرامة. إنه جمال فيه الصفاء و السناء و المقدرة على بلوغ الكمال الذي لا يتاح إلا لأعظم الفنون. –برتراند راسل-

ثانوية الشهيد شويمت عبد القادر

الجزار ـ باتنة ـ

الاختبار التجريبي لمادة الرياضيات

السنة الدراسية 2014/2013

المستوى: الثالثة ع تج

الموضوع الأول

التمرين الأول (08 نقاط) : I) g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=x^2+\ln x$

1- احسب نهايات الدالة g عند $+\infty$ و 0.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة g .وشكل جدول تغيراتها.

3- برهن أن المعادلة $g(x)=0$ يقبل وحيد α حيث $0,65\le\alpha\le0,66$.

4- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=1-x+\dfrac{1+\ln x}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (وحدة الطول $2cm$)

1- احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و 0.

2- بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=1-x$ مقارب لـ (C).

3- احسب الدالة المشتقة للدالة f واستنتج اشارتها انطلاقا من إشارة $g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4- α هو العدد الحقيقي المعرف في السؤال I.3)

أ) بين أن $\ln\alpha=-\alpha^2$ واستنتج أن $f(\alpha)=1-2\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$.

ب) برهن أن الدالة h المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $h(x)=1-2x+\dfrac{1}{x}$ متناقصة على هذا المجال .

واستنتج أن $f(\alpha)\prec h(0,65)$.

جـ) برهن أن $f(\alpha)\succ f(0,65)$ وأعطي حصرا لـ $f(\alpha)$.

5- ارسم المنحني (C) و (D) .

التمرين الثاني (04,5 نقطة) : الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

1- نعتبر المستوي (P) الذي يشمل $B(1;-2;1)$ وشعاعه الناظمي $\vec{n}(-2;1;5)$ و (Q) المستوي الذي معادلته

$x+2y-7=0$.

أ) برهن أن المستويين (P) و (Q) متعامدان .

ب) برهن ان تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (Δ) الذي يمر من النقطة $C(-1;4;-1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;-1;1)$

جـ) لتكن النقطة $A(5;-2;-1)$ احسب المسافة بين النقطة A والمستوي (P) والمسافة بين النقطة Aوالمستوي (Q).

د) عين المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ).

2- من اجل كل عدد حقيقي t ، نعتبر النقطة M_t التي احداثياتها $(1+2t;3-t;t)$ ، عن قيمة t حتى يكون الشعاعان $\overrightarrow{AM_t}$ و $\vec{u}$ متعامدان واستنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) بطريقة اخرى

<u>التمرين الثالث (04,5 نقطة)</u> : المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (وحة الطول $2cm$)

1/ z_1 و z_2 <u>عددين مركبين</u> ، حل جملة المعادلتين التالية :
$$\begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ z_1-z_2\sqrt{3}=-2i \end{cases}$$

2/ نعتبر النقطتين A و B لاحقاتاهما على الترتيب $z_A=-\sqrt{3}+i$ ، $z_B=-1+i\sqrt{3}$ ، اكتب z_A و z_B في شكلهما الاسي .علم A و B.

3/ احسب طويلة وعمدة $\frac{z_A}{z_B}$ ، واستنتج طبيعة المثلث ABO وقيس الزاوية $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$.

4/ عين لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $ACBO$معين،علم C في المعلم السابق. واحسب مساحة المثلث ABC.

5/ S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات الاحقة z' بحيث $z'=(\sqrt{3}-i)z$.

أ) عين طبيعة العناصر المميزة للتحويل S.

ب) عين لواحق النقط A'، B'، C' صور النقط A، B، C بالتحويل S .

جـ) ماهي مساحة المثلث $A'B'C'$.

<u>التمرين الرابع(03نقاط):</u> نعبتر من أجل كل عدد طبيعي nالمتتالية(u_n)المعرفة بـ: $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+4$ ونعتبر المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=u_n-6$.

1/ بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2/ عين عبارة v_n بدلالة n ثم بين أن $u_n=-5\left(\frac{1}{3}\right)^n+6$.

3/ احسب المجموع : $S=u_0+u_1+u_2+...........+u_n$

مع تمنياتنا لكم بالنجاح

حل التمرين الاول :

I) 1- $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ ، $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = -\infty$ 　 0.5

2- $g'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$ ومنه 　 $0 \quad + \quad +\infty$ 　 1.25

3- g دالة متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$ وتأخذ قيمها من قيم سالبة نحو قيم موجبة فهي تنعدم مرة واحدة على هذا المجال و $g(0.65) \approx -0.008$ ، $g(0.66) \approx 0.02$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $0,65 \le \alpha \le 0,66$. 　 0.5

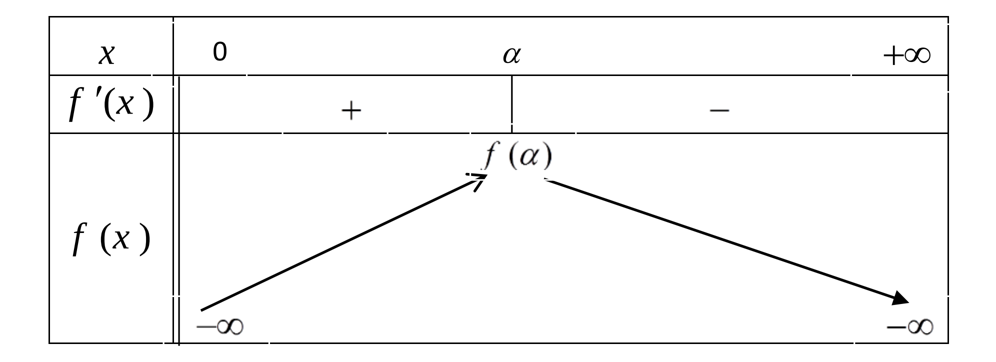
4- إشارة $g(x)$ على المجال $]0;\alpha[$ فإن $g(x) \prec 0$ وعلى المجال $]\alpha;+\infty[$ فإن $g(x) \succ 0$ 　 0.5

II)

1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = -\infty$ 　 0.5

2) $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1+\ln x}{x}\right) = 0$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 1 - x$ مقارب للمنحني (C) 　 0.25

3) $f'(x) = \dfrac{-\left(x^2+\ln x\right)}{x^2} = \dfrac{-g(x)}{x^2}$ ، ومنه إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$ ومنه الدالة 　 0.75



x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

0.5

0.25

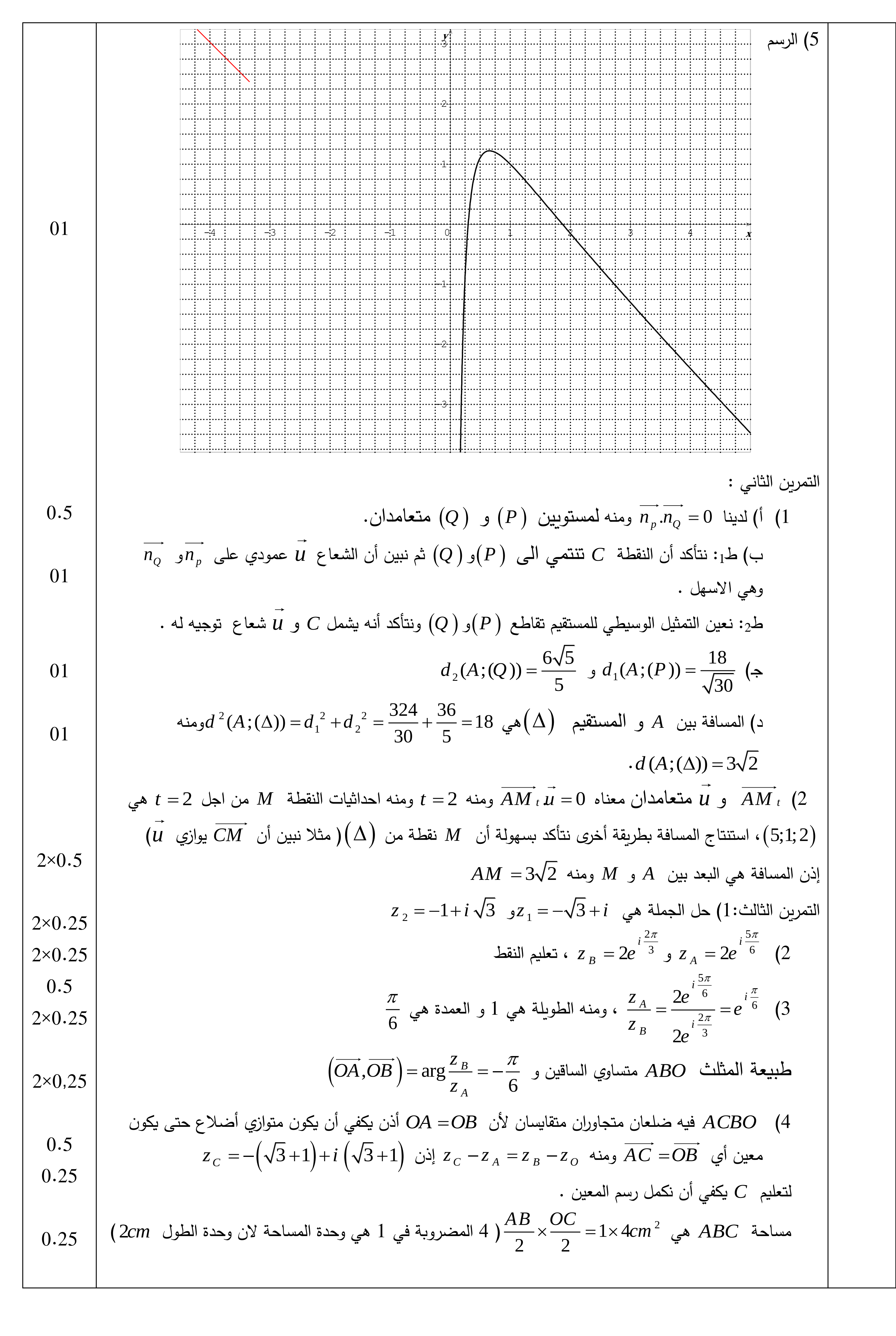
4) أ) تبيان ان $\ln\alpha = -\alpha^2$ لدينا $\alpha^2 + \ln\alpha = 0$ ومنه $\ln\alpha = -\alpha^2$

بالتعويض في عبارة الدالة f نجد $f(\alpha) = 1 - 2\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ 　 0.5

ب) لدينا $h'(x) = -1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-(x^2+1)}{x^2}$ واشارته سالبة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ومنه h متناقصة تماما 　 0.5

على هذا المجال .ولدينا $\alpha \succ 0.65$ إذن $h(\alpha) \prec h(0.65)$ وبما أن $f(\alpha) = h(\alpha)$ إذن $f(\alpha) \prec h(0.65)$ 　 0.5

ج) بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha[$ و $\alpha \succ 0.65$ فإن $f(\alpha) \succ f(0.65)$ مما سبق نستنتج $f(0.65) \prec f(\alpha) \prec h(0.65)$ ومنه $1.22 \prec f(\alpha) \prec 1.88$ 　 0.5

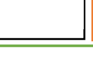
5) الرسم 	01
التمرين الثاني :	
1) أ) لدينا $\overrightarrow{n_p}.\overrightarrow{n_Q}=0$ ومنه لمستويين (P) و (Q) متعامدان.	0.5
ب) ط1: نتأكد أن النقطة C تنتمي الى (P)و (Q) ثم نبين أن الشعاع $\vec{u}$ عمودي على $\overrightarrow{n_p}$ و$\overrightarrow{n_Q}$ وهي الاسهل . ط2: نعين التمثيل الوسيطي للمستقيم تقاطع (P)و (Q) ونتأكد أنه يشمل C و $\vec{u}$ شعاع توجيه له .	01
جـ) $d_1(A;(P))=\frac{18}{\sqrt{30}}$ و $d_2(A;(Q))=\frac{6\sqrt{5}}{5}$	01
د) المسافة بين A و المستقيم (Δ) هي $d^2(A;(\Delta))=d_1^2+d_2^2=\frac{324}{30}+\frac{36}{5}=18$ ومنه $d(A;(\Delta))=3\sqrt{2}$.	01
2) $\overrightarrow{AM_t}$ و $\vec{u}$ متعامدان معناه $\overrightarrow{AM_t}.\vec{u}=0$ ومنه $t=2$ ومنه احداثيات النقطة M من اجل $t=2$ هي $(5;1;2)$، استنتاج المسافة بطريقة أخرى نتأكد بسهولة أن M نقطة من (Δ) (مثلا نبين أن $\overrightarrow{CM}$ يوازي $\vec{u}$) إذن المسافة هي البعد بين A و M ومنه $AM=3\sqrt{2}$	2×0.5
التمرين الثالث:1) حل الجملة هي $z_1=-\sqrt{3}+i$ و $z_2=-1+i\sqrt{3}$	2×0.25
2) $z_A=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و $z_B=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ، تعليم النقط	2×0.25
3) $\frac{z_A}{z_B}=\frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}}=e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، ومنه الطويلة هي 1 و العمدة هي $\frac{\pi}{6}$	0.5 2×0.25
طبيعة المثلث ABO متساوي الساقين و $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\arg\frac{z_B}{z_A}=-\frac{\pi}{6}$	2×0,25
4) $ACBO$ فيه ضلعان متجاوران متقايسان لأن $OA=OB$ أذن يكفي أن يكون متوازي أضلاع حتى يكون معين أي $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$ ومنه $z_C-z_A=z_B-z_O$ إذن $z_C=-(\sqrt{3}+1)+i(\sqrt{3}+1)$ لتعليم C يكفي أن نكمل رسم المعين .	0.5 0.25
مساحة ABC هي $\frac{AB}{2}\times\frac{OC}{2}=1\times 4cm^2$ (4 المضروبة في 1 هي وحدة المساحة لان وحدة الطول $2cm$)	0.25

	$z' = (\sqrt{3} - i)z$ (5	
0.25	أ) طبيعة التحويل تشابه مباشر نسبته 2 وزاويته $-\frac{\pi}{6}$ ومركزه O مبدأ المعلم .	
	ب) صور النقط A ، B ، C بالتحويل S هي :	
0.5	$z_{A'} = \left(\sqrt{3} - i\right)\left(-\sqrt{3} + i\right) = 2i\sqrt{3} - 2$ و $z_{B'} = 4i$ و $z_{C'} = -2 + i\left(4 + 2\sqrt{3}\right)$	
0.25	بما أن المثلث $A'B'C'$ هو صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر S فإن	
	(مساحة $A'B'C'$) $= 2^2$ (مساحة ABC) $= 4 \times 4cm^2$	
	التمرين الرابع :	
01	1) (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -5$	
2×0.5	2) $v_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و $v_n = u_n - 6$ ومنه $u_n = v_n + 6$ إذن $u_n = -5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6$	
	3) $S = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ ومنه $S = (v_0 + 6) + (v_1 + 6) + ... + (v_n + 6)$	
01	ومنه $S = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n + 6(n+1)$ إذن $S = -5\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{3} - 1} + 6(n+1)$	
	$S = \frac{15}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right) + 6(n+1)$	
	بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا	

المستوى : ثالثة علوم تجريبية	الجمهوريـــة الجزائريـــة الديمقراطيـــة الشعبيـــة وزارة التربيـــة الوطنيـــة مديريـــة التربيـــة لولايـــة الأغـــواط ثانوية الشهيد محمّد بوسبسي	يـــوم : الاثنين 11 مـاي 2015

 إلــــى

 البكالوريا التجريبي في مادّة الرّياضيات

   مـــن

على المترشح إختيار أحد الموضوعين

المــــوضوع الأول

التّمرين الأوّل (06 نقـــاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقاط $A(3,2,6)$ $B(1,2,4)$ $c(4,-2,5)$

السّؤال 01	أ	أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$	00.50
	ب	استنتج مساحة المثلث (ABC).	00.25
	ج	بين ان معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x+y-2z+4=0$	00.75

نعتبر النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC)

السّؤال 02	أ	بين أنّ $H(\frac{-8}{9};\frac{-4}{9};\frac{8}{9})$.	01.50
	ب	احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.	00.50

(S)سطح الكرة التي مركزها O و تشمل النقطة A .

السّؤال 03	أ	بين أن تقاطع (S) مع المستوي (ABC) هو الدائرة (C) التي مركزها H .	00.50
	ب	احسب طول نصف قطر الدائرة (C).	00.50

لتكن G مرجح الجملة $\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$

السّؤال 04	أ	عين إحداثيات النقطة G	00.25
	ب	احسب بعد النقطة G عن المستوي (ABC)	00.25

(Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4$

السّؤال 05	أ	بين أنّ (Γ) سطح كـرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .	00.25
	ب	استنتج الوضع النسبي لـ: (Γ) و (ABC).	00.75

التّمرين الثّـــاني (07نقـــاط)

$P(Z)$ كثير حدود للمتغير المركب Z حيث: $P(Z)=Z^3-5Z^2+12Z-8$

السّؤال			النقاط
السّؤال01	أ	أحسب $P(1)$ و ماذا تستنتج؟	00.50
	ب	عيّن العددين الحقيقين a وَ b بحيث من أجل كل عدد مرّكب Z يكون: $P(Z)=(Z-1)(Z^2+aZ+b)$	00.50
	ج	استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $P(Z)=0$	00.75

في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

نعتبر النقط B, A وَ C التي لواحقها $z_A=2+2i$; $z_B=2-2i$; $z_C=1$

السّؤال			النقاط
السّؤال 02	أ	علم النقط B, A وَ C. و استنتج طبيعة المثلث ABC	00.75
	ب	أكتب z_A وَ z_B على الشكل الأسي .	00.50
	ج	استنتج أنّ: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n}=2$	00.75
السّؤال 03	أ	عين لاحقة D صورة B بالتحاكي h الذي مركزه C و نسبته -3	00.50
	ب	عين لاحقة E صورة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$	00.50

L عدد مركب معرف كما يلي : $L=\frac{z_D-z_A}{z_E-z_A}$

السّؤال			النقاط
السّؤال 04	أ	أكتب L على الشكل الجبري	00.50
	ب	استنتج طبيعة المثلث ADE	00.50

I منتصف القطعة $[ED]$ و H نظيرة A بالنسبة الى I

السّؤال			النقاط
السّؤال 05	أ	عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ADHE$.	00.75
	ب	عين طبيعة (Ψ) للنقط M من المستوي حيث: $\left\Vert\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{ME}\right\Vert=4\left\Vert\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MA}\right\Vert$	00.50

التّمرين الثّــالث (07 نقــاط)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}$

و (c_f) تمثيلها البياني في معلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

الجزء	السؤال			العلامة
الجزء الأوّل	السّؤال 01	أ	تــحقق أنّه من كل عدد حقيقي x , $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$	00.25
		ب	استنتج أنّ f فــردية وفسّر النتيجة هندسيا.	01.00
		ج	أحسب نهاية الدالة f عند أطراف مجال التعريف.	00.50
	السّؤال 02	أ	بين أنـّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=\frac{-1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$	00.50
		ب	شكل جدول تغيّرات الدّالة f.	00.50
		ج	أحسب $f(0)$ ثم استنتج إشارة الدالة f على $\mathbb{R}$.	00.50
	السّؤال 03	أ	بين أن $(\Delta): y=\frac{-1}{2}x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (c_f)	00.25
		ب	استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (c_f) وَالمماس (Δ).	00.25
		ج	أنشئ (c_f) وَالمستقيم (Δ) في المعلم الــسابق ذِكْـرُهُ	00.50
الجزء الثّالث	السّؤال 01	أ	تــحقق أنـّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا : $\frac{1}{1+e^{x}}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$	00.25
		ب	استنتج أنـّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا : $\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^{2}$	00.50
		ج	أحسب مساحة الحـيّز المحدد بـــ: • المنحنى (c_f). • $y=0$. • المستقيمين $x=-1$ وَ $x=0$.	01.00
الجزء الرّابع	g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=\|f(x)\|$ وَ (c_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق			
	السّؤال 01	أ	إشرح كيف يمكن إنشاء (c_g) انطلاقا من (c_f) . ثُمّ أنشئ (c_g) في نفس المعلم السابق .	01.00

الموضوع الثّاني

التّمرين الأوّل (05 نقـــاط)			
(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = \frac{-5}{4} \\ u_{n+1} = (2+u_n)^2 - 2 \end{cases}$			
السّؤال 01	أ	برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2 < u_n < -1$	01.00
	ب	أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)	01.00
	ج	استنتج أنّ (u_n) متقاربة.	00.50
(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = ln(u_n + 2)$			
السّؤال 02	أ	بين أنّ (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل.	00.50
	ب	أكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n	00.50
	ج	أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$	00.50
	د	أحسب بدلالة n الجداء π_n حيث: $\pi_n = (u_0+2)(u_1+2)(u_2+2)....(u_n+2)$	01.00

التمرين الثّاني (15 نقطة)

الجزء الأوّل

1ـ حل المعادلة التفاضلية التّالية: $y' - 2y = 0 ....(1)$

2ـ u دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $u(x) = (ax+b)e^x$.

أـ عين العددين الحقيقيين a و b حتى تكون u حل للمعادلة التفاضلية:
$y' - 2y = xe^x .....(2)$

بـ بين أنّ v تكون حل للمعادلة (1) اذا و فقط اذا كان $u+v$ حل للمعادلة (2).

جـ استنتج جميع حلول المعادلة (2)

دـ عين الحل الخاص للمعادلة (2) الذي ينعدم من أجل 0

<u>الجزء الثّاني :</u>

لتكن الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2e^{x}-x-2$

1. أحسب النهايات عند أطراف مجال التعريف.
2. أدرس تغيرات الدالة g ثمّ شكل جدول تغيراتها.
3. نقبل أنّ الدّالة g تقبل حلان.

أ. تحقق أنّ 0 هو أحد الحلول و استنتج أنّ α هو الحل الثاني حيث : $-1.6\le\alpha\le-1.5$

4. استنتج حسب قيم x اشارة $g(x)$.

<u>الجزءالثّالث</u>

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$

و (c_f) تمثيلها البياني في معلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال التعريف.
2. أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f .

- استنتج أنّ إشارة f' هي من إشارة g .

3. أدرس تغيرات الدالة f ثمّ شكل جدول تغيراتها.
4. بين أنّ $f(\alpha)=-\frac{\alpha^{2}+2\alpha}{4}$ ثُمّ استنتج حصرا لـ: $f(\alpha)$.
5. أنشئ (c_f) في المعلم السابق ذِكرُهُ.

<u>الجزءالرّابع</u>

m عدد حقيقي <u>سالب</u>

<u>1</u> فسّر هندسيا التكامل I حيث : $I=\int_{m}^{0}f(x)dx$.

<u>2</u> باستخدام التكامل بالتجزئة , أحسب $\int_{m}^{0}xe^{x}dx$.

<u>3</u> أحسب عندئذ I.

<u>4</u> أحسب نهاية I لـمّا يؤول m الى $-\infty$.

الموضوع الأول

التمرين الأوّل

السّؤال 01

أ- حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1-3\\2-2\\4-6\end{pmatrix};\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ وَ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-3\\-2-2\\5-6\end{pmatrix};\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}=0$$

ب- استنتاج مساحة المثلث (ABC).

لتكن S مساحة المثلث (ABC).

$=\dfrac{AB.AC}{2}$ ، $AB=\sqrt{(-2)^2+(0)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}$ وَ $AC=\sqrt{(1)^2+(-4)^2+(1)^2}=\sqrt{18}$

و منه : $S=\dfrac{\sqrt{18}.\sqrt{8}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}.2\sqrt{2}}{2}=6$

ج- بين ان معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x+y-2z+4=0$

نعوّض إحداثيات النّقط A, B و C في المعادلة:

A(3,2,6): $2(3)+(2)-2(6)+4=0$

B(1,2,4): $2(1)+(2)-2(4)+4=0$

C(4,-2,5): $2(4)+(-2)-2(5)+4=0$

لدينا:

النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC)

السّؤال 02

أ- إثبات أنّ $H(\frac{-8}{9};\frac{-4}{9};\frac{8}{9})$.

- نكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم (OH):

المستقيم (OH) يشمل النقطة O و شعاع توجيهه هو الشعاع الناظمي للمستوي (ABC):

إذن: $(OH):\begin{cases}x=0+2t\\y=0+t\\z=0-2t\end{cases}\quad ....(t\in\mathbb{R})$

النقطة H هي نقطة تقاطع المستقيم (OH) مع المستوي (ABC).

- نعوض الآن احداثيات التمثيل الوسيطي في معادلة (ABC)

$2(2t)+t-2(-2t)+4=0$ ومنه: $t=\frac{-4}{9}$

- الآن نعوض $t=\frac{-4}{9}$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (OH)

$$\begin{cases} x_H=2(\frac{-4}{9}) \\ y_H=(\frac{-4}{9}) \\ z_H=-2(\frac{-4}{9}) \end{cases}$$

بعد التبسيط نجد $H(\frac{-8}{9};\frac{-4}{9};\frac{8}{9})$

ب- حساب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

لدينا: عبارة الحجم هي : $V=\frac{1}{3}S.h$

حيث : S هي مساحة المثلث ABC و h هي الارتفاع - الطول OH-

- من السؤال 01 -أ- لدينا $S=6$
- الآن نحسب الطول OH

$$OH=\sqrt{\left(\frac{-8}{9}-0\right)^2+\left(\frac{-4}{9}-0\right)^2+\left(\frac{8}{9}-0\right)^2}$$

$$OH=\sqrt{\left(\frac{64}{81}\right)+\left(\frac{16}{81}\right)+\left(\frac{64}{81}\right)}$$

$$OH=\sqrt{\frac{144}{81}}$$

$$OH=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

- مما سبق يمكن ان نحسب الحجم V

لدينا: $V=\frac{1}{3}S.h$

تـع : $V=\frac{1}{3}.6.\frac{4}{3}=\frac{24}{9}$

إذن: $V=\frac{8}{3}(uv)$

أ- إثبات أن تقاطع (S) مع المستوي (ABC) هو الدائرة (C) التي مركزها H.

- نقوم بحساب بُعد النقطة O عن المستوي ABC

$$d(O;(ABC))=\frac{|2x_o+y_o-2z_o+4|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}$$ و منه: $d(O;(ABC))=\frac{4}{3}$

- نحسب الآن نصف قطر سطح الكرة (S)

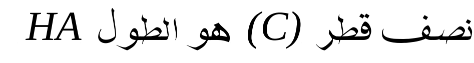
$$R=OA=\sqrt{3^2+2^2+6^2}=7$$

نلاحظ أنّ: $d(O;(ABC))<R$ و منه (S) يقطع (ABC) في دائرة.

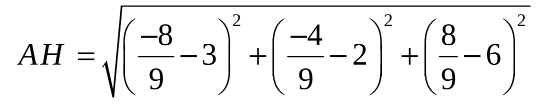
هذه الدائرة مركزها المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC)

أي النقطة H

ب ـ حساب طول نصف قطر الدائرة (C):

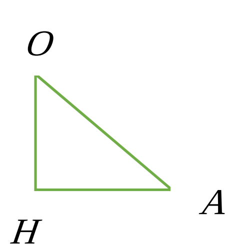


نصف قطر (C) هو الطول HA

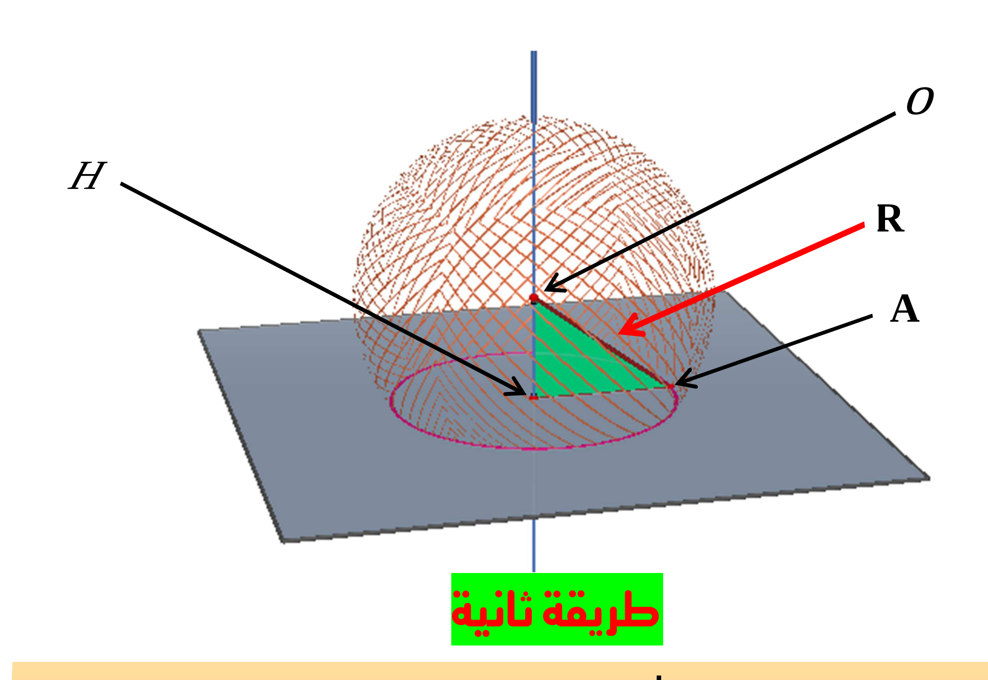


$$AH=\sqrt{\left(\frac{-8}{9}-3\right)^2+\left(\frac{-4}{9}-2\right)^2+\left(\frac{8}{9}-6\right)^2}$$

بعد التبسيط نجد: $AH=\frac{5\sqrt{17}}{3}$



رسم توضيحي ـ فقط ـ



طريقة ثانية

لدينا:

$$R=OA$$
$$r=AH$$
$$d\left(O;(ABC)\right)=OH$$
$$R^2=OH^2+OA^2$$

و منه:

$$R^2=OH^2+AH^2$$
$$AH=\sqrt{R^2-OH^2}$$
$$AH=\sqrt{49-\frac{16}{9}}$$
$$AH=\sqrt{\frac{425}{9}}=\frac{5\sqrt{17}}{3}$$

لتكن G مرجح الجملة $\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$

أ ـ عين إحداثيات النقطة G

$$X_G = \frac{3x_O + x_A + x_B + x_C}{3+1+1+1} \qquad Y_G = \frac{3y_O + y_A + y_B + y_C}{3+1+1+1} \qquad Z_G = \frac{3z_O + z_A + z_B + z_C}{3+1+1+1}$$

ومنه

$$X_G = \frac{3(0)+(3)+(1)+(4)}{6} = \frac{8}{6} \qquad Y_G = \frac{3(0)+(2)+(2)+(-2)}{6} = \frac{2}{6} \qquad Z_G = \frac{3(0)+(6)+(4)+(5)}{6} = \frac{15}{6}$$

إذن $G\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$

ب ـ حساب بعد النقطة G عن المستوي (ABC)

$$d(G,(ABC)) = \frac{\left|2\left(\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)-2\left(\frac{5}{2}\right)+4\right|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}}$$

$$d(G,(ABC)) = \frac{\left|\frac{8}{3}+\frac{1}{3}-5+4\right|}{\sqrt{(2)^2+(1)^2+(-2)^2}} = \frac{2}{3}$$

ومنه: $d(G,(ABC)) = \frac{2}{3}$

لدينا:

(Γ) مجموعة النقط M من الفضاء حيث: $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 4$

أ ـ إثبات أنّ (Γ) سطح كـرة يُطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

لدينا: G مرجح الجملة $\{(O,3),(A,1),(B,1),(C,1)\}$

ومنه: من أجل كل نقطة M من الفضاء

لدينا :
$$3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = (3+1+1+1)\overrightarrow{MG}$$
$$3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$$

ومنه : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 4$ تُكافئ $\left\|6\overrightarrow{MG}\right\| = 4$ أي $6MG = 4$

و منه : $\left\|3\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = 4$ تُكافئ $MG = \frac{2}{3}$

و منه: (Γ) سطح كـرة مركزها G و نصف قطرها $\frac{2}{3}$.

ب ـ استنتاج الوضع النسبي لـ (Γ) و (ABC).

لدينا: بُعد النقطة G عن المستوي (ABC) هو: $\frac{2}{3}$....... (1)

وَ : (Γ) سطح كُـرة مركزها G و نصف قطرها $\frac{2}{3}$....... (2)

من (1) وَ (2) نستنتج أنّ: (ABC) مماس (Γ)

التمرين الثّاني

السؤال الأوّل:

$P(Z)$ كثير حدود للمتغير المركب Z حيث: $P(Z)=Z^3-5Z^2+12Z-8$

أ ـ حساب $P(1)$:

$P(Z)=1^3-5(1)^2+12(1)-8=0$

نستنتج أنّ 1 هو جذر لكثير الحدود $P(Z)$

تعيين العددين الحقيقين a وَ b بحيث من أجل كل عدد مرّكب Z يكون: $P(Z)=(Z-1)(Z^2+aZ+b)$

لدينا: $P(Z)=(Z-1)(Z^2+aZ+b)$

و منه: $P(Z)=Z^3+aZ^2+bZ-Z^2-aZ-b$

أي: $P(Z)=Z^3+(a-1)Z+(b-a)Z-b$

لدينا $P(Z)=Z^3-5Z^2+12Z-8$ من جهة

وَ $P(Z)=Z^3+(a-1)Z+(b-a)Z-b$ من جهة أخرى

بالمقارنة نجد:

$\begin{cases} a-1=-5 \\ -b=-8 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} a-4 \\ b=8 \end{cases}$

مـمّا سبق ينتج أنّ: $P(Z)=(Z-1)(Z^2-4Z+8)$

جـ استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة: $P(Z)=0$

$P(Z)=0$ يعني أنّ $(Z-1)(Z^2-4Z+8)=0$

و منه: إمّا $Z-1=0$ أو $Z^2-4Z+8=0$

لدينا: $Z-1=0$ و منه $Z_0=1$

وَ: $Z^2-4Z+8=0$ نستخدم المميز $\Delta=b^2-4ac$

و منه:

$\Delta=4^2-4(1)(8)$

$\Delta=16-32$

$\Delta=-16$

$\Delta=(4i)^2$

$Z_1=\frac{4-4i}{2}$

$Z_1=\frac{4-4i}{2}=2-2i$

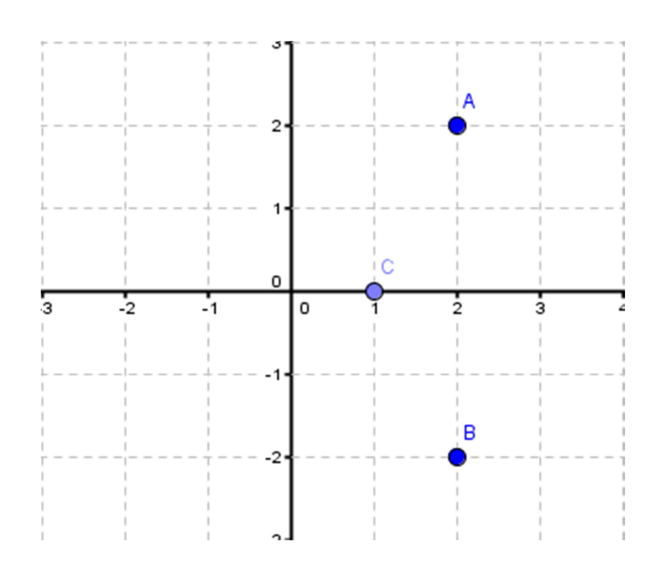
إذن:

حلول المعادلة هي

$$Z_0 = 1$$
$$Z_1 = 2 - 2i$$
$$Z_2 = 2 + 2i$$

السؤال الثّاني

أ ـ تعليم النقط



استنتاج طبيعة المثلث ABC

المثلث ABC مساوي الساقين

الطريقة 01: (التناظر بالنسبة الى محور الفواصل)

الطريقة 02: حساب الأطوال

ب- كتابة z_A و z_B على الشكل الأسي :

لدينا: $z_A = 2+2i\ ;\ z_B = 2-2i$

$Z_A = 2+2i$

$|Z_A| = \sqrt{(2)^2+(2)^2} = 2\sqrt{2}$

$$arg(Z_A): \begin{cases} \cos\theta_A = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_A = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$arg(Z_A) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; ......(k\in\mathbb{Z})$

$Z_A = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$Z_B = 2-2i$

$|Z_B| = \sqrt{(2)^2+(-2)^2} = 2\sqrt{2}$

$$arg(Z_B): \begin{cases} \cos\theta_B = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_B = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$arg(Z_B) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; ......(k\in\mathbb{Z})$

$Z_B = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ج- استنتاج أنّ: $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = 2$

لدينا:

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

و

$$\frac{z_B}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ومنه:

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{8n} + \left(e^{-i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{8n}$$

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = \left(e^{i\left(\frac{8n\pi}{2}\right)}\right) + \left(e^{-i\left(\frac{8n\pi}{4}\right)}\right)$$

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = \left(e^{i(4n\pi)}\right) + \left(e^{-i(2n\pi)}\right)$$

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = \left(e^{i(2n\pi)}\right) + \left(e^{-i(2n\pi)}\right)$$

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = (1)+(1) = 2$$

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{8n} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{8n} = 2$$



أـ تعيين لاحقة D صورة B بالتحاكي h الذي مركزه C و نسبته -3

تذكير

h تحاكي نسبته (-3) و مركزه C, عبارته المركبة هي :

$$(Z' - Z_w) = -3(Z - Z_w)$$

حيث M نقطة لاحقتها Z وَ M' نقطة لاحقتها Z'

w (مركز التحاكي h) نقطة لاحقتها Z_w

و نقول أيضا: Z' صورة Z بهذا التحاكي

إذن: D صورة B بالتحاكي h الذي مركزه C و نسبته -3

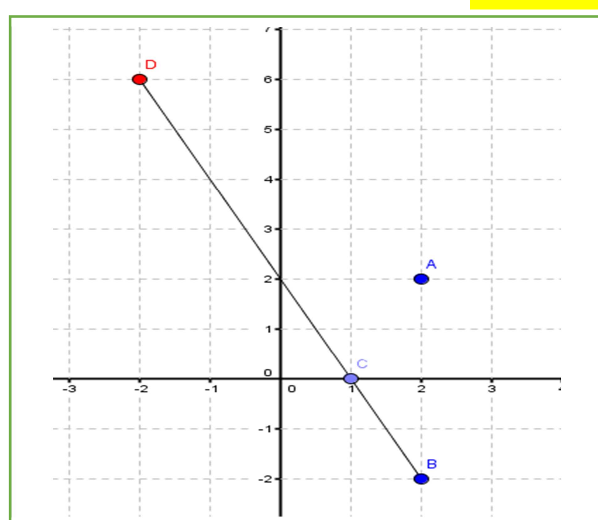
يعني:

$$(Z_D - Z_C) = -3(Z_B - Z_C)$$
$$Z_D = -3(Z_B - Z_C) + Z_C$$

تطبيق عددي:

$$Z_D = -3(2-2i-1)+1$$
$$Z_D = -3(1-2i)+1$$
$$Z_D = -3+6i+1$$
$$Z_D = -2+6i$$

و منه : $Z_D = -2+6i$



السؤال الثّالث

بـ تعيين لاحقة E صورة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

تذكير

r دوران, زاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ و مركزه w, عبارته المركبة هي :

$$(Z' - Z_w) = -3(Z - Z_w)$$

حيث M نقطة لاحقتها Z وَ M' نقطة لاحقتها Z'

w (مركز الدوران r) نقطة لاحقتها Z_w

و نقول أيضا: Z' صورة Z بهذا التحاكي

إذن: E صورة B بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $-\frac{\pi}{2}$

$$(Z_E - Z_O) = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_O)$$

يعني:

$$(Z_E) = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z_B)$$

$$(Z_E) = -i\,(Z_B)$$

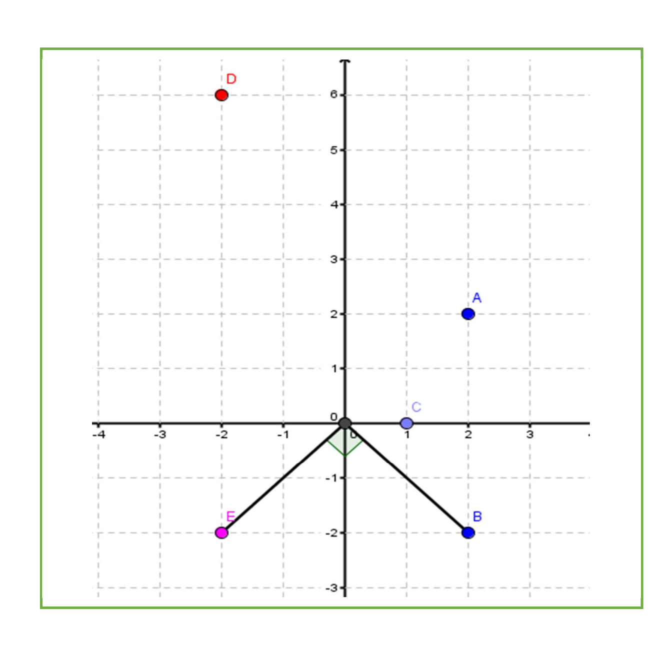
تطبيق عددي:

$$(Z_E) = -i\,(2-2i)$$

$$Z_E = -2i - 2$$

$$Z_E = -2 - 2i$$

و منه: $Z_E = -2 - 2i$



السؤال الرّابع

أ ـ كتابة L على الشكل الجبري:

لدينا : L عدد مركب معرف كما يلي : $L = \frac{z_D - z_A}{z_E - z_A}$

و لدينا أيضا: $Z_E = -2-2i\ ;\ Z_D = -2+6i\ ;\ Z_A = 2+2i$

و منه :

$$L = \frac{(-2+6i)-(2+2i)}{(-2-2i)-(2+2i)}$$

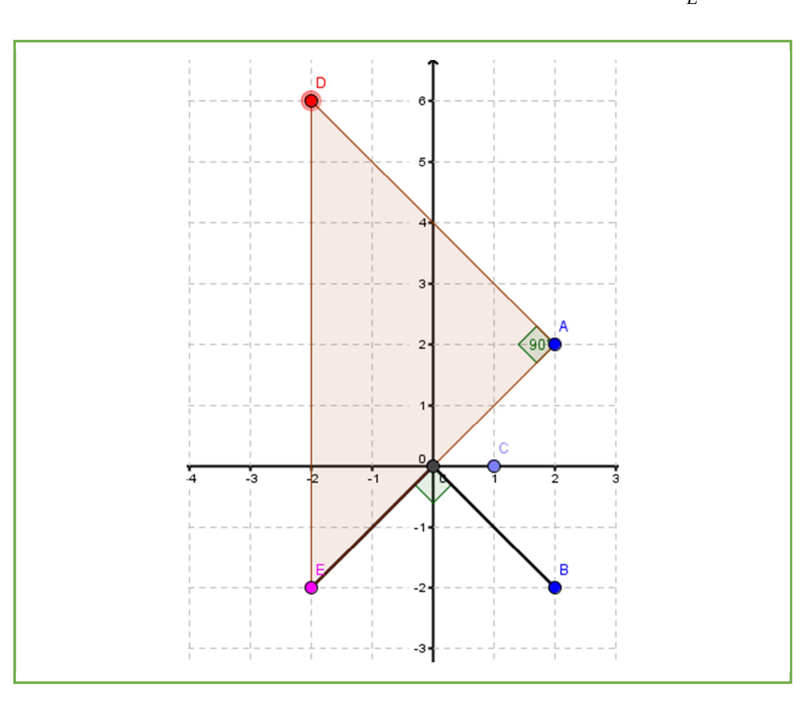
$$L = \frac{-2+6i-2-2i}{-2-2i-2-2i}$$

$$L = \frac{-4+4i}{-4-4i}$$

$$L = \frac{(-4+4i)(-4+4i)}{(-4-4i)(-4+4i)}$$

$$L = \frac{16-16i-16i-16}{32}$$

$$L = \frac{-32i}{32} = -i$$



و منه: $L = -i$

ب ـ استنتاج طبيعة المثلث ADE

لدينا: $L = \dfrac{z_D - z_A}{z_E - z_A}$

$|L| = \left|\dfrac{z_D - z_A}{z_E - z_A}\right|$

و منه: $|L| = \dfrac{|z_D - z_A|}{|z_E - z_A|} = \dfrac{AD}{AE}$.......(1)   من (1) وَ (2) نستنتج $\dfrac{AD}{AE} = 1$ أي $AD = AE$

$|L| = |-i| = 1$.........(2)

$\arg(L) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_A}{z_E - z_A}\right)$

و لدينا أيضا: $\arg(L) = \arg(-i)$ من (3) نستنتج أنّ $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

$\arg(L) = -\dfrac{\pi}{2}$; .....(3)

مما سبق نستنتج أنّ: المثلث ADE قائم و متساوي الساقين

السؤال الخامس

أ ـ تعيين طبيعة الرباعي $ADHE$ مع التبرير

لدينا: I منتصف القطعة $[ED]$ و H نظيرة A بالنسبة الى I

1- I منتصف $[ED]$

2- H نظيرة A بالنسبة الى I يعني أنّ I منتصف $[AH]$

من 1 و 2 نستنتج أنّ: $[AH]$ $[ED]$ متناصفان
ومنه
الرباعي $ADHE$ متوازي أضلاع

3- $AD = AE$

4- $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$

حسب السؤال السابق
المثلث ADE قائم و مساوي الساقين

من $1, 2, 3$ و 4 : نستنتج أنّ : الرباعي $ADHE$ مُـــربع

ب ـ تعيين طبيعة المجموعة (Ψ) للنقط M من المستوي حيث:

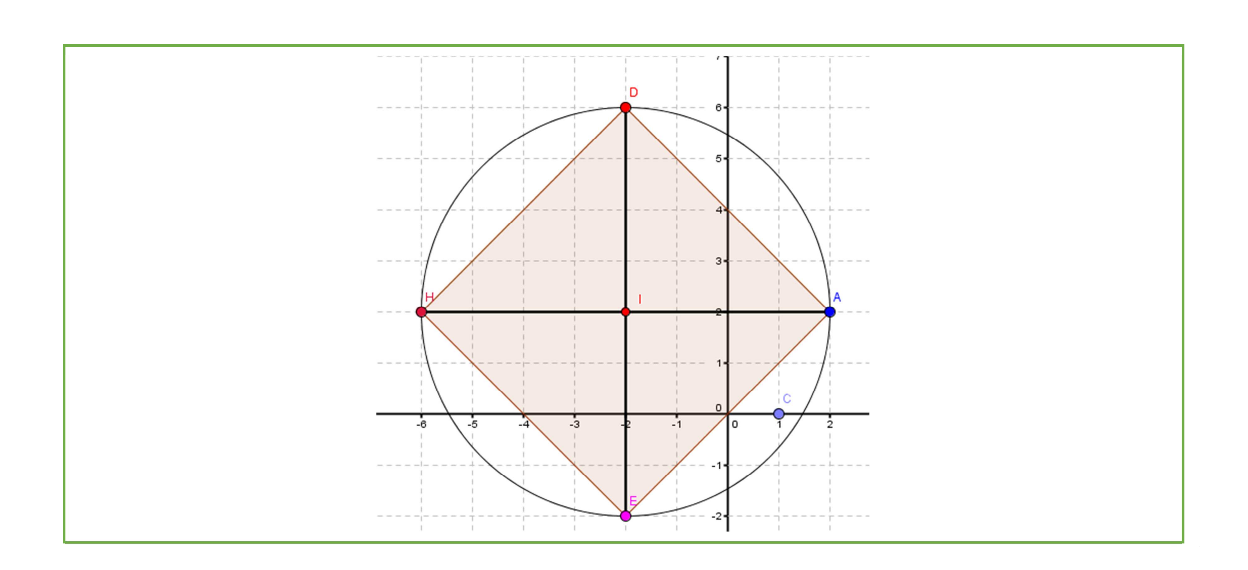
$$\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{ME}\right\| = 4\left\|\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MA}\right\|$$

النقطة I هي مركز ثقل المربع $ADHE$ ومنه $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{ME} = 4\overrightarrow{MI}$

إذن: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{ME}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MA}\right\|$ تكـافئ:

$$\begin{aligned}
&\left\|4\overrightarrow{MI}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MA}\right\|\\
&\Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{MI}\right\|=4\left\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{AM}\right\|\\
&\Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{MI}\right\|=4\left\|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI}\right\|\\
&\Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{MI}\right\|=4\left\|\overrightarrow{AI}\right\|\\
&\Leftrightarrow 4MI=4AI\\
&\Leftrightarrow MI=AI
\end{aligned}$$

و منه : طبيعة المجموعة هي الدّائرة (C) المحيطة بالمربع $ADHE$.



التمرين الثّالث

الجزء الأوّل:

لدينا :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}$

و (c_f) تمثيلها البياني في معلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

السّؤال 01

أ ـ التــحقق أنّه من كل عدد حقيقي x , $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{e^{-x}\left(1+\frac{1}{e^{-x}}\right)}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{e^{-x}\left(1+e^{x}\right)}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{\frac{1}{e^{x}}\left(1+e^{x}\right)}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{1}{\frac{\left(1+e^{x}\right)}{e^{x}}}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^{x}+1-1}{1+e^{x}}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^{x}+1}{1+e^{x}}-\frac{1}{1+e^{x}}$$

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{1+e^{x}}$$

ب- استنتاج أنّ f فـــردية وفسّر النتيجة هندسيا.

تذكير

f دالة عددية و D_f مجال تعريفها.
نقول أن f فردية
اذا كان لكل x من D_f ، $(-x)$ من D_f و $f(-x)=f(x)$

$$f(-x)=1-\frac{1}{2}(-x)-\frac{2}{e^{-x}+1}$$
$$f(-x)=-\frac{1}{2}(-x)+1-\frac{2}{e^{-x}+1}$$
$$f(-x)=-\frac{1}{2}(-x)+1-\frac{2}{e^{-x}+1}$$

من السؤال السابق لدينا: $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$

$$f(-x)=-\frac{1}{2}(-x)+1-2\left(1-\frac{1}{1+e^{x}}\right)$$
$$f(-x)=-\frac{1}{2}(-x)+1-2+\frac{2}{1+e^{x}}$$
$$f(-x)=\frac{1}{2}(x)-1+\frac{2}{1+e^{x}}$$
$$f(-x)=-1+\frac{1}{2}(x)+\frac{2}{1+e^{x}}$$
$$f(-x)=-\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{1+e^{x}}\right)$$
$$f(-x)=-f(x)$$

ج- حساب نهاية الدالة f عند أطراف مجال التعريف.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

لأنّ

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^{x}+1}=0$$

و

$$\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{2}x=-\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

السّؤال 02

أـ إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$f'(x) = \frac{-1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

لدينا:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \left(\frac{0\left(e^x + 1\right) - e^x(2)}{\left(e^x + 1\right)^2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} - \left(\frac{-2e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{\left(e^x + 1\right)^2}{2\left(e^x + 1\right)^2} + \frac{4e^x}{2\left(e^x + 1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\left(e^x + 1\right)^2 + 4e^x}{2\left(e^x + 1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{2x} - 2e^x - 1 + 4e^x}{2\left(e^x + 1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{2x} + 2e^x - 1}{2\left(e^x + 1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\left(e^{2x} - 2e^x + 1\right)}{2\left(e^x + 1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\left(e^x - 1\right)^2}{2\left(e^x + 1\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

نلاحظ أنّ: $f'(x) \le 0$

f': تنعدم عند 0 و لاتُغير إشارتها

نستنتج أنّ النقطة **(0 ;f(0))** هي نقطة إنعطاف لـ: (c_f)

ب- جدول تغيّرات الـدَّالة f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘			$-\infty$

ج- حساب $f(0)$:

لدينا : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$

و منه: $f(0) = 1 - \frac{1}{2}(0) - \frac{2}{e^0 + 1}$ نـــــجد: $f(0) = 0$

استنتاج إشـارة الدالة f على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

السّؤال 03

أ- إثبات أنّ المستقيم $(\Delta): y = \frac{-1}{2}x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ: (c_f)

إذا كان: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 0$ أو $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 0$

فإنّ: $(\Delta): y = \frac{-1}{2}x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ: (c_f) بجوار $+\infty$ أو $-\infty$ على الترتيب

لدينا: $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$$

و منه:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{2}{e^x + 1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \mathbf{0}$$

نستنتج أنّ : $(\Delta): y = \frac{-1}{2}x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ: (c_f) بجوار : $+\infty$

ب- استنتاج الوضعية النسبية للمنحنى (c_f) والمماس: (Δ).

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$

لدينا: $f(x)-y = 1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}-\left(1-\frac{1}{2}x\right)$

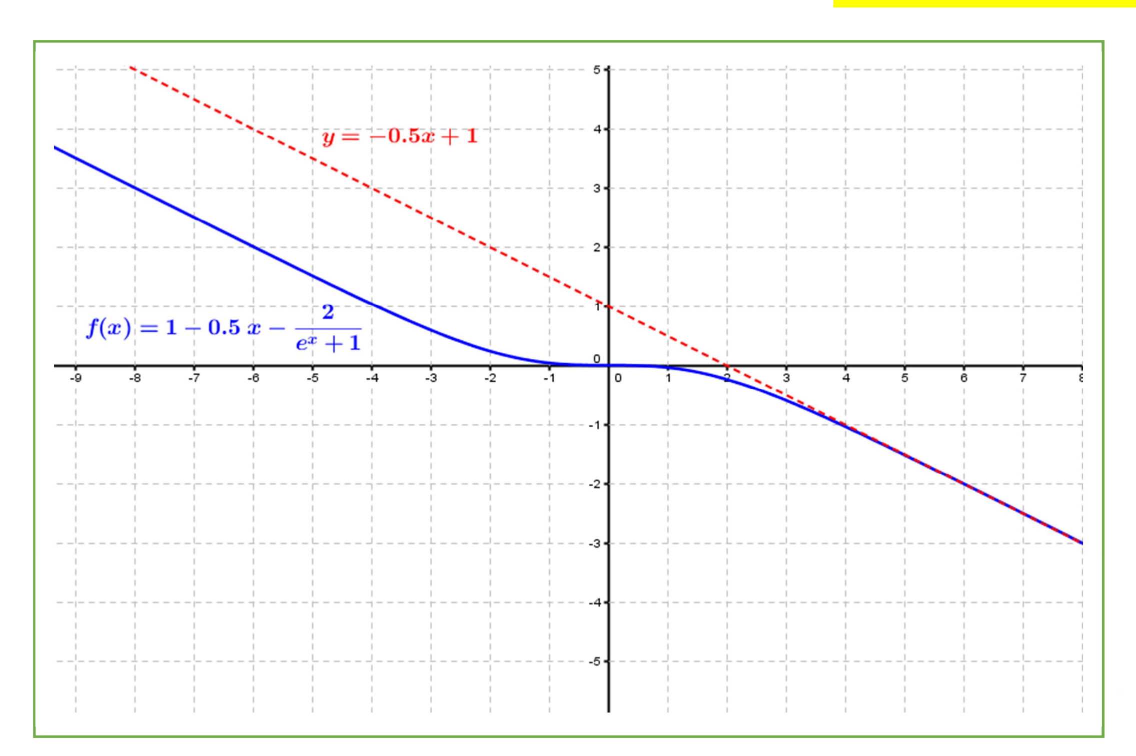
$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\left(1-\frac{1}{2}x\right) = -\frac{2}{e^x+1}$

و بما أنّ: $-\frac{2}{e^x+1}$ لأنّ: $2>0$ و $e^x+1>0$

فإنّ: $f(x)-y<0$

نستنتج أنّ: (c_f) يقع تحت (Δ)

ج- إنشاء (c_f) والمستقيم (Δ)



الجزء الثّـاني :

السّؤال 01

أـ تـحقق أنّـه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا: $\frac{1}{1+e^{x}}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

لدينا:

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^{x}}}{\frac{1}{e^{x}}+1}$$

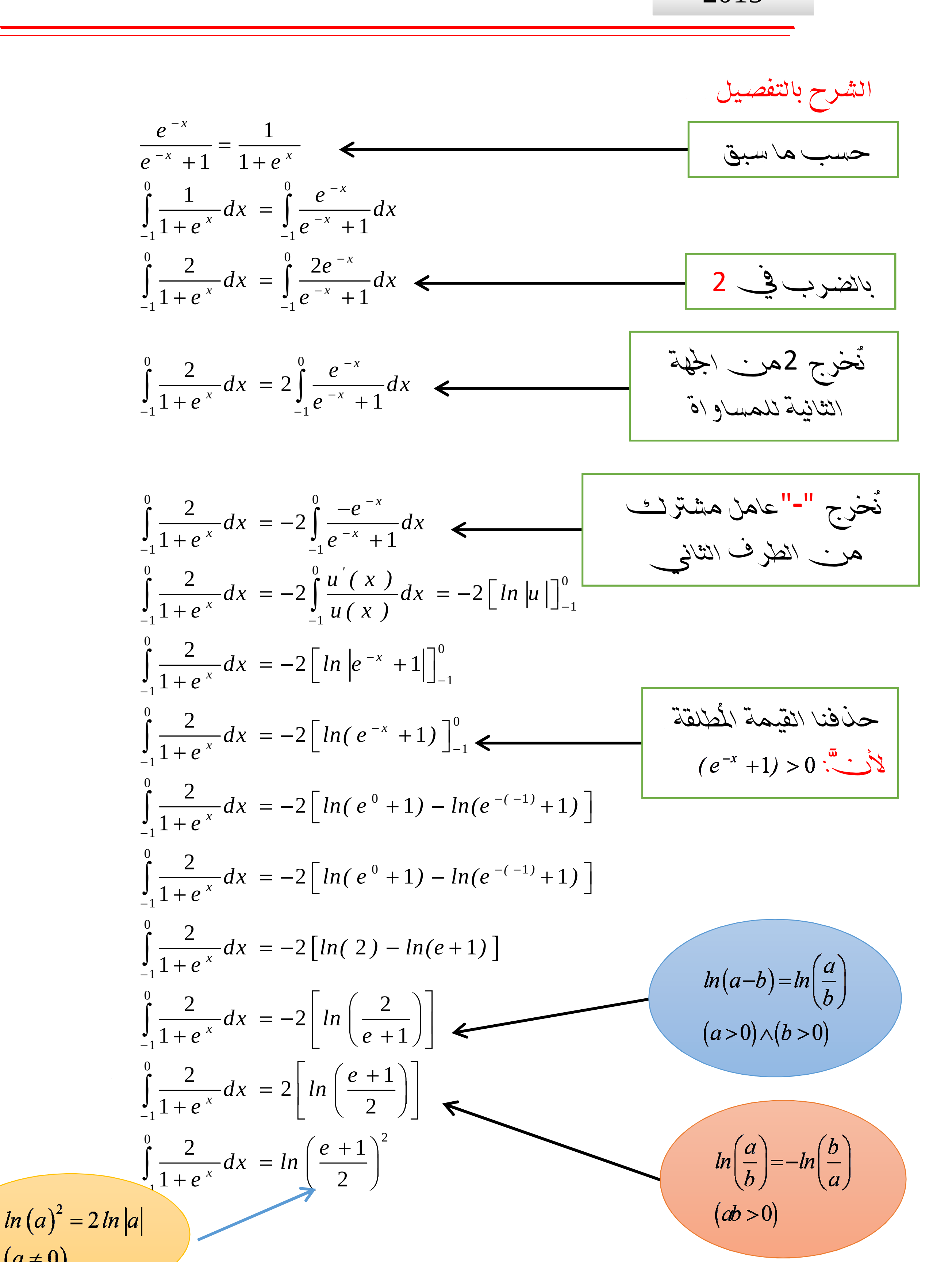
$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{e^{x}}}{\frac{1+e^{x}}{e^{x}}}$$

$$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{1}{1+e^{x}}$$

و هو المطلوب

ب ـ استنتاج أنّـه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ لدينا : $\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^{2}$

لدينا: حسب ما سبق: $\frac{1}{1+e^{x}}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ و منه: $\frac{2}{1+e^{x}}=\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$



الشرح بالتفصيل
$\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{1}{1+e^{x}}$
حسب ما سبق
$\int_{-1}^{0}\frac{1}{1+e^{x}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$
$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$
بالضرب في 2
$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=2\int_{-1}^{0}\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$
نُخرج 2من الجهة الثانية للمساواة
$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\int_{-1}^{0}\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$
نُخرج "-" عامل مشترك من الطرف الثاني
$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\int_{-1}^{0}\frac{u'(x)}{u(x)}dx=-2\left[\ln|u|\right]_{-1}^{0}$
$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\left[\ln|e^{-x}+1|\right]_{-1}^{0}$
$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\left[\ln(e^{-x}+1)\right]_{-1}^{0}$
حذفنا القيمة المُطلقة
لأنّ: $(e^{-x}+1)>0$
$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\left[\ln(e^{0}+1)-\ln(e^{-(-1)}+1)\right]$
$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\left[\ln(e^{0}+1)-\ln(e^{-(-1)}+1)\right]$
$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\left[\ln(2)-\ln(e+1)\right]$
$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=-2\left[\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)\right]$
$\ln(a-b)=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$
$(a>0)\wedge(b>0)$
$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=2\left[\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)\right]$
$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=-\ln\left(\frac{b}{a}\right)$
$(ab>0)$
$\int_{-1}^{0}\frac{2}{1+e^{x}}dx=\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^{2}$
$\ln(a)^{2}=2\ln|a|$
$(a\neq 0)$

جـ- أحسب مساحة الحـيّز المحدد بـــ:

- المنحنى (c_f).
- $y = 0$.
- المستقيمين $x = -1$ و $x = 0$.

ليكن I مساحة الحيّز المـُراد حسابه.

$$I = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

$$I = \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}\right) dx$$

$$I = \int_{-1}^{0} (1)\,dx - \int_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x\right) dx - \int_{-1}^{0} \left(\frac{2}{e^x + 1}\right) dx$$

$$I = [x]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^2$$

$$I = [0 - (-1)]_{-1}^{0} - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]_{-1}^{0} - ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} - ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{5}{4} - ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^2$$

$$I = \frac{5}{4} - ln\left(\frac{e+1}{2}\right)^2 (u.a)$$

الجزء الثالث

لدينا: g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=|f(x)|$ و (c_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق

السؤال 01

شرح كيف يمكن إنشاء (c_g) انطلاقا من (c_f).

- نكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

$$g(x)=f(x)............f(x)>0$$
$$g(x)=-f(x)............f(x)<0$$

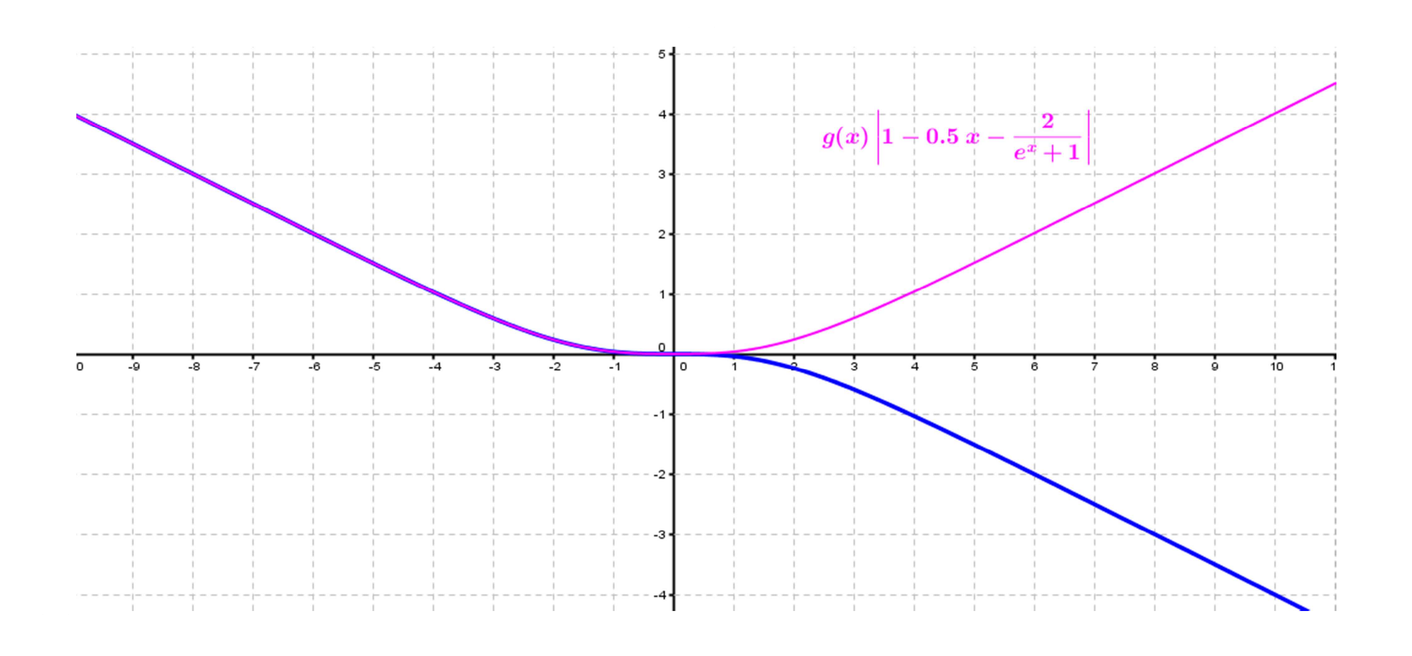
نستنتج أنّ:

(c_g) ينطبق على (c_f) إذا كــــان: $f(x)>0$ **(** ***(c_f) فوق محور الفواصل*** **)**.

(c_g) نظـــير (c_f) بالنسبة إلى محور الفواصل إذا كـان: $f(x)>0$ **(** ***(c_f) تحت محور الفواصل*** **)**.

- إنشاء (c_g) في نفس المعلم السابق.

ملاحظة: نُعيد الرّسم للتوضيح فقط:



الموضوع الثاني

التمرين الأوّل

لدينا:

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{-5}{4} \\ u_{n+1} = (2+u_n)^2 - 2 \end{cases}$

السّؤال 01

أ- البرهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n: $-2 < u_n < -1$

1. التحقق : من أجل $n = 0$

لدينا : $-2 < u_0 = \dfrac{-5}{4} < -1$ **إذن الخاصية مُحققة**

2. الفرضية : نفرض أنّ الخاصية صحيحة من اجل n أي: $-2 < u_n < -1$

و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي: $-2 < u_{n+1} < -1$

لدينا حسب الفرضية : $-2 < u_n < -1$

$$-2 < u_n < -1$$

نُظيف 2 الى الأطراف

$$2-2 < 2+u_n < 2-1$$

$$0 < 2+u_n < 1$$

بالتربيع نجد

$$0 < (2+u_n)^2 < 1$$

$$0-2 < (2+u_n)^2 - 2 < 1-2$$

نُظيف (-2) الى الأطراف

$$-2 < \underbrace{(2+u_n)^2 - 2}_{u_{n+1}} < -1$$

ومنـــــــــــــه: $-2 < u_{n+1} < -1$

3. الإستنتاج: نستنتج أن الفرضية صحيحة من اجل n أي: $-2 < u_n < -1$

ب- دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n)

ندرس إشارة الفرق: $u_{n+1}-u_n$

لدينا: $u_{n+1}=(2+u_n)^2-2$

و منه:

$$u_{n+1}-u_n=(2+u_n)^2-2-u_n$$
$$u_{n+1}-u_n=4+4u_n+u_n^2-2-u_n$$
$$u_{n+1}-u_n=2+3u_n+u_n^2$$
$$u_{n+1}-u_n=u_n^2+3u_n+2$$
$$u_{n+1}-u_n=(u_n+2)(u_n+1)$$

حسب السؤال السابق لدينا: $-2<u_n<-1$

$u_n<-1$	$-2<u_n$ أي $u_n>-2$
و منه:	و منه:
$u_n+1<0$	$u_n+2>0$

نستنتج أنّ: $u_{n+1}-u_n<0$ و منه: (u_n) متناقصة

ج- استنتاج أنّ (u_n) متقاربة:

بما أنّ متناقصة و محدودة من الأسفل فهي مُتقاربة

لدينا:

(v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي:

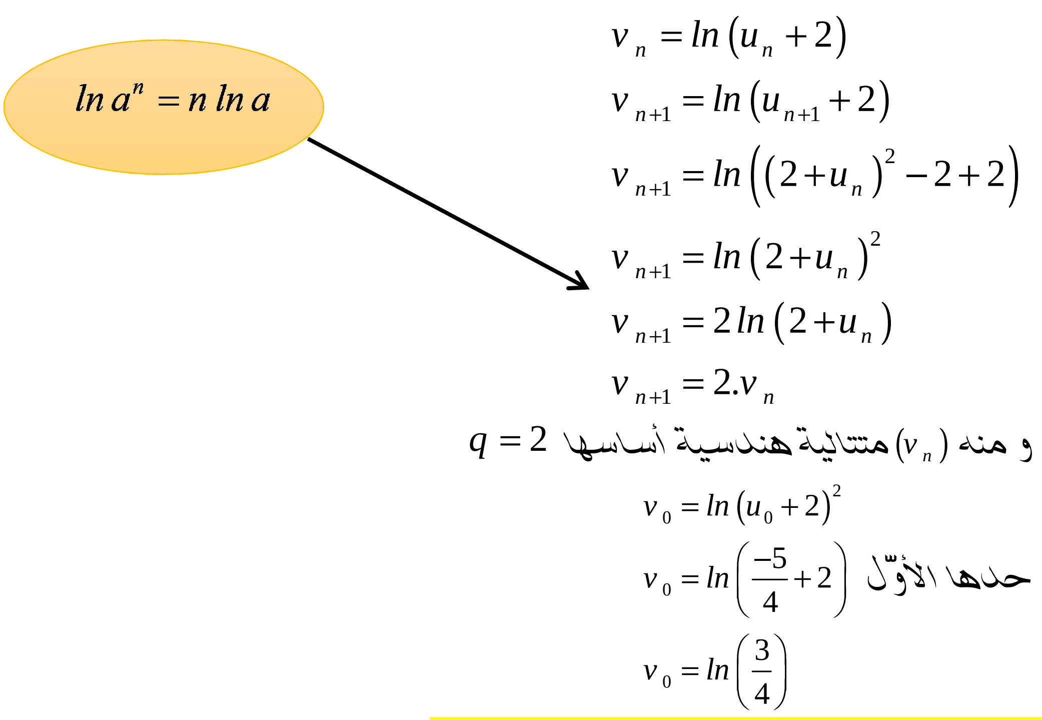
$$v_n=ln(u_n+2)$$

السّؤال 02

أ- إثبات أنّ (v_n) هندسية و تعيين حدّها الأوّل:

لإثبات أنّ (v_n) هندسية نُثبت أنّ $v_{n+1}=v_n.q$

لدينا:



$$v_n = ln\left(u_n + 2\right)$$
$$v_{n+1} = ln\left(u_{n+1} + 2\right)$$
$$v_{n+1} = ln\left(\left(2+u_n\right)^2 - 2 + 2\right)$$
$$v_{n+1} = ln\left(2+u_n\right)^2$$
$$v_{n+1} = 2\,ln\left(2+u_n\right)$$
$$v_{n+1} = 2.v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$

حدها الأوّل
$$v_0 = ln\left(u_0 + 2\right)^2$$
$$v_0 = ln\left(\frac{-5}{4} + 2\right)$$
$$v_0 = ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

ب- أكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتاج u_n بدلالة n

- الحد العام لمتتالية هندسية حدّها الأوّل v_0 و أساسها q هو: $v_n = v_0 q^n$

إذن: $v_n = ln\left(\frac{3}{4}\right)(2)^n$

- لدينا: $v_n = ln\left(u_n + 2\right)$ و منه $e^{v_n} = e^{ln(u_n+2)}$ أي $e^{v_n} = u_n + 2$

و منه: $u_n = e^{v_n} - 2$

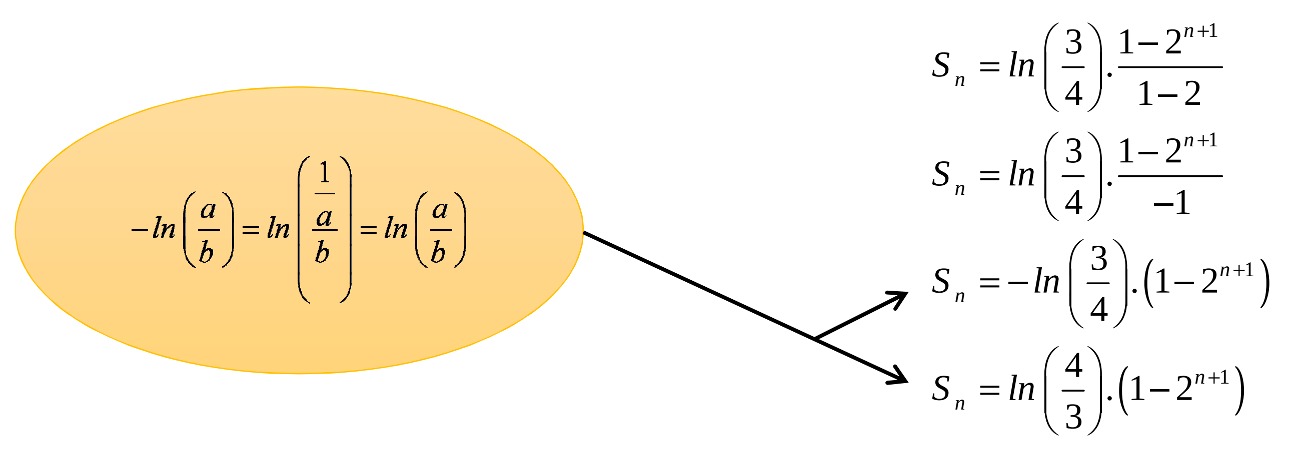
بتعويض قيمة v_n نجد: $u_n = ln\left(\frac{3}{4}\right)(2)^n - 2$

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

لدينا: مجموع متتالية هندسية حدّها الأوّل v_0 و أساسها هو:

$$v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = v_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

إذن:



$$S_n = ln\left(\frac{3}{4}\right).\frac{1-2^{n+1}}{1-2}$$

$$S_n = ln\left(\frac{3}{4}\right).\frac{1-2^{n+1}}{-1}$$

$$S_n = -ln\left(\frac{3}{4}\right).\left(1-2^{n+1}\right)$$

$$S_n = ln\left(\frac{4}{3}\right).\left(1-2^{n+1}\right)$$

$$-ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\left(\frac{1}{\frac{a}{b}}\right) = ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

د- أحسب بدلالة n الجداء π_n حيث:

$$\pi_n = \left(e^{v_0}-2+2\right)\left(e^{v_1}-2+2\right)\left(e^{v_2}-2+2\right)....\left(e^{v_n}-2+2\right)$$

$$\pi_n = \left(e^{v_0}\right)\left(e^{v_1}\right)\left(e^{v_2}\right)....\left(e^{v_n}\right)$$

$$\pi_n = e^{v_0}e^{v_1}e^{v_2}......e^{v_n}$$

$$\pi_n = e^{v_0+v_1+v_2........+v_n}$$

$$\pi_n = e^{S_n}$$

$$\pi_n = e^{n\left(\frac{4}{3}\right).\left(1-2^{n+1}\right)}$$

إذن:

$$\pi_n = e^{n\left(\frac{4}{3}\right).\left(1-2^{n+1}\right)}$$

التمرين الثّاني

السّؤال 01

أ- حل المعادلة التفاضلية: $y'-2y=0.......(1)$

لدينا: $y'-2y=0$ و منه : $y'=2y$ هـــــــــــن الشكل: $y'=ay\ ;.......(a\in\mathbb{R}^*)$

حلول المعادلة $y'-2y=0$ هي الدّوال: $x\mapsto ke^{2x}$ حيث k عدد حقيقي كيفي.

السّؤال 02

أ- عين العددين الحقيقين a و b حتى تكون u حل للمعادلة التفاضلية:

$$y'-2y=xe^{x}.....(2)$$

لدينا: u دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $u(x)=(ax+b)e^{x}$.

u حل للمعادلة التفاضلية: $y'-2y=xe^{x}.....(2)$ يعني أنّ: $u'-2u=xe^{x}$

$u(x)=(ax+b)e^{x}$. و منه: $u'(x)=ae^{x}+e^{x}(ax+b)$

$u'-2u=xe^{x}$ تكافئ $ae^{x}+e^{x}(ax+b)-2(ax+b)e^{x}=xe^{x}$

و مـــــــــنــــه: $ae^{x}-(ax+b)e^{x}=xe^{x}$

بالنشـــر نجـــــــد: $ae^{x}-axe^{x}-be^{x}=xe^{x}$

ومنـــــــــــــــه: $-axe^{x}+e^{x}(a-b)=xe^{x}$

بالمقارنة نجد: $(-a=1)$ و $(a-b=0)$

و منه : $(a=-1)$ و $(b=-1)$

إذن:

u حل للمعادلة التفاضلية: $y'-2y=xe^{x}$

إذا و فقط إذا كانت: $u(x)=(-x-1)e^{x}$.

ب- إثبات أنّ v حل للمعادلة (1) اذا و فقط اذا كان v+u حل للمعادلة (2).

$v+u$: حل للمعادلة (2). يعـــــــــني: $(u+v)'-2(u+v)=xe^{x}$

و منه: $u'+v'-2u-2v=xe^{x}$

و بما أنّ u حل للمعادلة (2) فإنّ: $v'-2v=0$

و منه: v حل للمعادلة (1) اذا و فقط اذا كان v+u حل للمعادلة (2).

ج- استنتاج جميع حلول المعادلة (2):

نضع : $f(x)=u+v$ و منه مجموعة حلول المعادلة (2) هي الدوال:

$$f(x)=(-x-1)e^{x}+ke^{2x}\ ;.......(k\in\mathbb{R})$$

د- تعيين الحل الخاص للمعادلة (2) الذي ينعدم من أجل 0:

لدينا: $f(0)=0$ تكافئ: $(-0-1)e^{0}+ke^{0}=0$

تكافئ: $-1+k=0$ أي $k=1$

إذن: الحل الخاص للمعادلة (2) الذي ينعدم من أجل 0 هو: $f(x)=(-x-1)e^{x}+e^{2x}$

الجزء الثّـاني:

لدينا: الدّالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x)=2e^{x}-x-2$

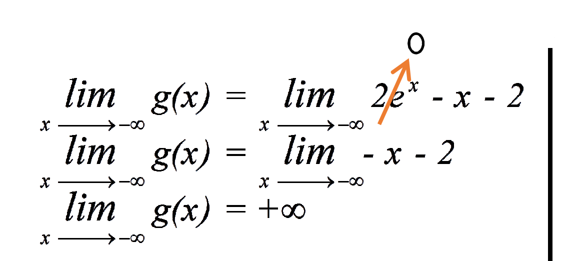
السّؤال 01

أ- حساب النهايات عند أطراف مجال التعريف.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2e^{x}-x-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2e^{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$



ب- دراسة تغيرات الدالة g

- المشتقــــــــــة: $g'(x)=2e^{x}-1$
- إشارة المشتقة:

$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x}-1=0$$

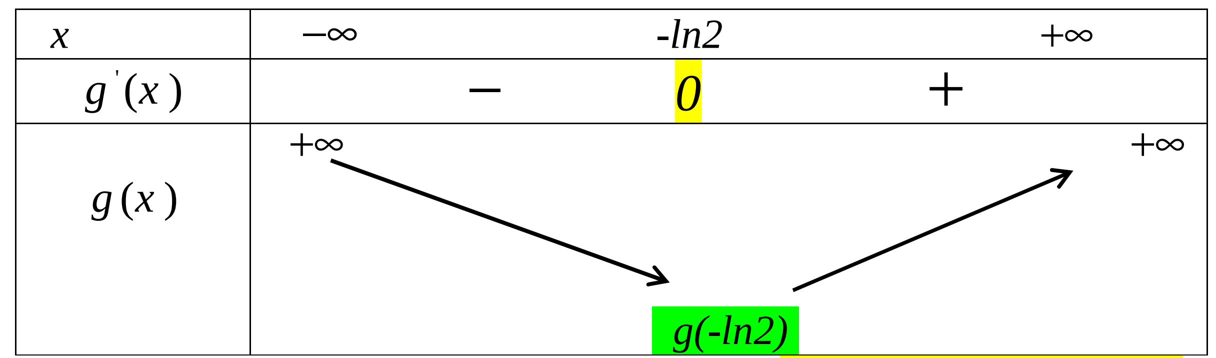
$$g'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x}=1$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{2}$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow x=ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow x=-ln\,2$$

- جدول التغيرات:



x	$-\infty$	$-ln2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$g(-ln2)$	↗ $+\infty$

$g(-ln\,2)=2e^{-ln\,2}-(-ln\,2)-2$

$g(-ln\,2)=2e^{ln\frac{1}{2}}+ln\,2-2$

$g(-ln\,2)=2\left(\frac{1}{2}\right)+ln\,2-2$

$g(-ln\,2)=1+ln\,2-2$

$g(-ln\,2)=-1+ln\,2=-0.31$

نقبل أنّ الدّالة g تقبل حلان

- .التحقق أنّ 0 هو أحد الحلول:

$g(0)=2e^{0}-(0)-2$

$g(0)=2-2=0$

و منه : $g(0)=0$

- استنتاج أنّ α هو الحل الثاني حيث : $-1.6\leq\alpha\leq-1.5$

لدينا : الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $]-\infty;-\ln 2[$ و بالتالي على $]-1.5;-1.6[$

و لدينا أيضا : $g(-1.5)=-0.05374$ و $g(-1.6)=0.00379$ أي: $g(-1.5)\times g(-1.6)<0$

إذن: حسب نظرية القيّم المتوسطة فإنّ $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث : $-1.6\leq\alpha\leq-1.5$

يُحقق: $g(\alpha)=0$

ب- إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الجزء الثّـالث:

لدينا: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$

و (c_f) تمثيلها البياني في معلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

السّؤال 01

أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجال التعريف.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} - (x+1)e^{x}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x} - (x+1)\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - (x+1)e^{x}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - xe^{x} - e^{x}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

السّؤال 02

أ- أحسب f' الدالة المشتقة للدالة f:

لدينا: $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$

و منه :

$$f'(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$$
$$f'(x)=2e^{2x}-\left[1\times e^{x}+e^{x}\times(x+1)\right]$$
$$f'(x)=2e^{2x}-e^{x}-e^{x}(x+1)$$
$$f'(x)=2e^{2x}-e^{x}-xe^{x}-e^{x}$$
$$f'(x)=2e^{2x}-2e^{x}-xe^{x}$$
$$f'(x)=e^{x}\left(2e^{x}-x-2\right)$$
$$f'(x)=e^{x}.g(x)$$

ب- استنتج أنّ إشارة f' هي من إشارة g.

نلاحظ أنّ إشارة الدالة f' هي من إشارة الدالة g . لأنّ $e^{x}>0$

ج- دراسة تغيرات الدالة f

بما أنّ إشارة f' هي من إشارة الدّالة g فإنّ: جدول تغيّرات الدّالة f يكون كمايلي :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$f(0)$	↗	$+\infty$

السّؤال 03

أ- بين أنّ $f(\alpha)=-\dfrac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ ثمّ استنتج حصر ا لـ: $f(\alpha)$.

لدينا: $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^{x}$

و منه: $f(\alpha)=e^{2\alpha}-(\alpha+1)e^{\alpha}$

نعلم أنّ: $e^{2\alpha}=\left(e^{\alpha}\right)^2$ و منه يمكن أن نكتب عبارة f كمايلي : $f(\alpha)=\left(e^{\alpha}\right)^2-(\alpha+1)e^{\alpha}$

و لدينا: حسب ما سبق : $g(\alpha)=0$ أي $2e^{\alpha}-\alpha-2=0$ و منه : $e^{\alpha}=\dfrac{\alpha+2}{2}$

نُعوّض e^{α} في الدالة f

إذن:

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2-(\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)$$

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left[\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)-(\alpha+1)\right]$$

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left[\frac{\alpha+2}{2}-\frac{2\alpha+2}{2}\right]$$

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left[\frac{\alpha+2-2\alpha-2}{2}\right]$$

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left[\frac{-\alpha}{2}\right]$$

$$f(\alpha)=\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left[\frac{-\alpha}{2}\right]$$

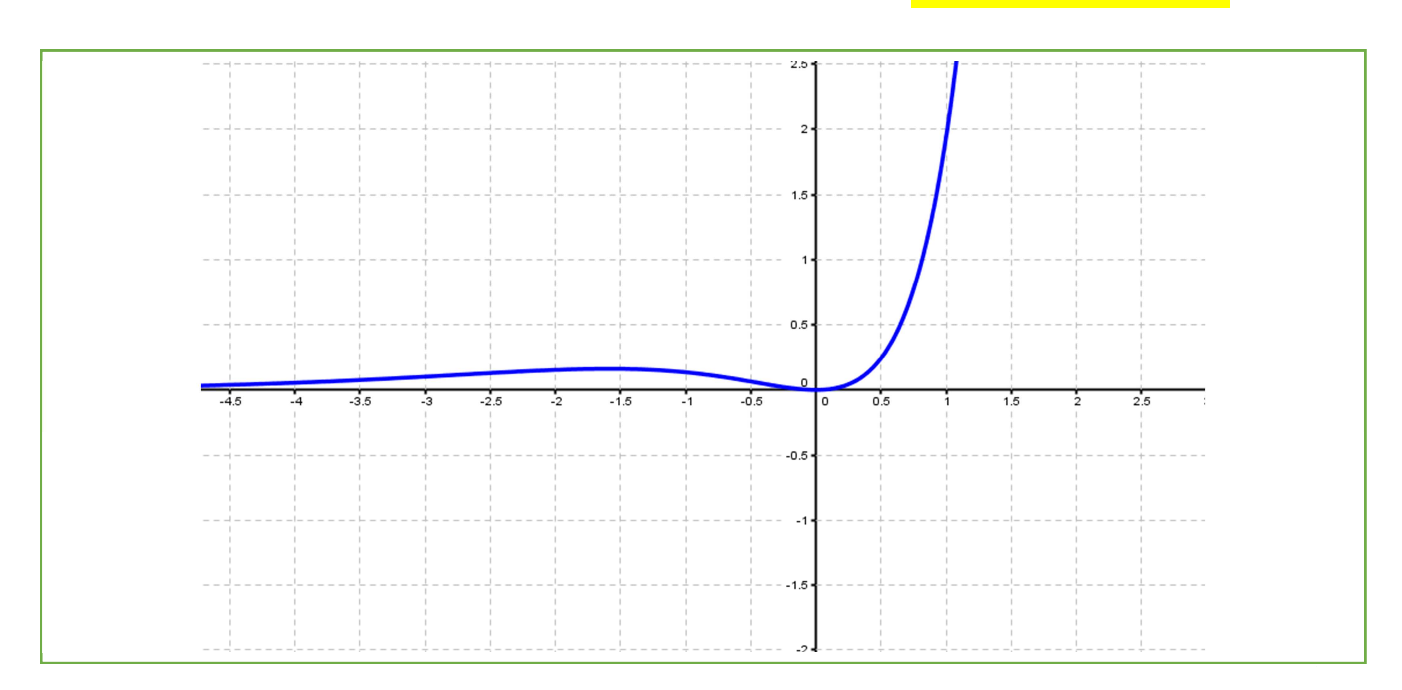
$$f(\alpha)=-\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{4}\right)$$

- حصر العدد $f(\alpha)$

$$-1.6 \le \alpha \le -1.5$$
$$-3.2 \le 2\alpha \le -3; ......(1)$$
$$(-1.5)^2 \le \alpha^2 \le (-1.6)^2 ; .....(2)$$
$$-3.2+(-1.5)^2 \le \alpha^2 + 2\alpha \le -3+(-1.6)^2$$
$$\frac{-3.2+(-1.5)^2}{4} \le \frac{\alpha^2+\alpha}{4} \le \frac{-3+(-1.6)^2}{4}$$
$$-\left(\frac{-3+(-1.6)^2}{4}\right) \le -\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{4}\right) \le -\left(\frac{-3.2+(-1.5)^2}{4}\right)$$
$$0.11 \le f(x) \le 0.24$$

لدينا:

ب- أنشاء (c_f) :



الجزء الـــرّابع:

لدينا: m عدد حقيقي ســالب .

السّؤال 03

أـ التفسير الهندسي للتكامل I حيث: $I=\int_m^0 f(x)dx$.

يمثّل التكامل I مساحة الحيّز المحدّد بـ:

- المنحنى (c_f).
- المستقيم $x=m$ و المستقيم $x=0$.
- محور الفواصل.

ب ـ باستخدام التكامل بالتجزئة , نحسب $\int_m^0 xe^x dx$.

نضع:

$u(x)=x$ و منه $u'(x)=1$

$v'(x)=e^x$ $v(x)=e^x$

باستعمال التكامل بالتجزئة يصبح :

$$\int_m^0 xe^x dx=\left[xe^x\right]_m^0-\int_m^0 e^x dx$$

$$\int_m^0 xe^x dx=\left[0e^0-me^m\right]_m^0-\left[e^x\right]_m^0$$

$$\int_m^0 xe^x dx=\left[0e^0-me^m\right]-\left[e^0-e^m\right]$$

$$\int_m^0 xe^x dx=\left[-me^m\right]-\left[1-e^m\right]$$

$$\int_m^0 xe^x dx=-me^m-1+e^m$$

ج- حساب I.

نضع : $J=\int_m^0 xe^x dx=-me^m-1+e^m$

لدينا : $I=\int_m^0 f(x)dx$. و $f(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$

و منه :

$$I=\int_m^0\left(e^{2x}-(x+1)e^x\right)dx.$$

$$I=\int_m^0\left(e^{2x}-xe^x-e^x\right)dx.$$

$$I=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_m^0-J-\left[e^x\right]_m^0.$$

$$I=\left[\frac{1}{2}e^0-\frac{1}{2}e^{2m}\right]_m^0-J-\left[e^0-e^m\right]_m^0.$$

$$I=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2m}\right]-\left[-me^m-1+e^m\right]-\left[1-e^m\right]_m^0.$$

$$I=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2m}+me^m+1-e^m-1+e^m.$$

$$I=-\frac{1}{2}e^{2m}+me^m+\frac{1}{2}.$$

د- حساب نهاية I لـمّا يؤول m الى $-\infty$.

$$\lim_{m\to-\infty} I=\lim_{m\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{2m}+me^m+\frac{1}{2}$$

(0 ، 0)

$$\lim_{m\to-\infty} I=\frac{1}{2}$$

و منه: $\lim_{m\to-\infty} I=\frac{1}{2}$

اختار(ي) احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

نعتبر المستوي (P) الذي يشمل النقطة $B(1,-2,1)$ و $\vec{n}(-2,1,5)$ شعاع ناظمي له و ليكن (Q) المستوي الذي معادلته : $x+2y-7=0$

1. أ) برهن أن (P) و (Q) متعامدان.

ب) برهن أن تقاطع (P) و (Q) هو مستقيم (Δ) يشمل النقطة $C(-1,4,-1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(2,-1,1)$

ج) لتكن النقطة $A(5,-2,-1)$. أحسب بعد النقطة A عن المستوي (P) ثم بعد A عن المستوي (Q)

د) أحسب بعد A عن المستقيم (Δ) .

2. t عدد حقيقي، نعتبر النقطة $M_t(1+2t,3-t,t)$.

أ) أحسب بدلالة t الطول AM_t

ب) نضع $f(t)=AM_t$. أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم حدد قيمتها الحدية الصغرى على $\mathbb{R}$.

ج) فسر هندسيا القيمة الحدية الصغرى للدالة f

التمرين الثاني: (05نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $\left(z+\sqrt{3}+i\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$

2. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق $z_A=\sqrt{3}+i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ و $z_C=e^{i\pi}z_A$ على الترتيب.

أ) احسب $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_C|$

ب) استنتج أن النقاط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (Γ) يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها

ج) أنشئ (Γ) و النقاط A ، B و C في المعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

د) اوجد z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

هـ) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ حقيقي

3. ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z'=\left(1-i\sqrt{3}\right)z-3+i\sqrt{3}$$

أ) عين طبيعة التحويل النقطي S ، مع تحديد عناصره المميزة.

ب) عين ثم انشئ $(\mathcal{E})$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي المركب التي تحقق:

$$\left(z-z_A\right)\left(\overline{z-z_A}\right)=\left(z-z_C\right)\left(\overline{z-z_C}\right)$$

ج) عين ثم أنشئ المجموعة $(\mathcal{E}')$ صورة المجموعة $(\mathcal{E})$ بالتحويل النقطي S

التمرين الثالث :(07نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ، الوحدة $1\,cm$

I. نعتبر الدالتان u و v المعرفتان على المجال $]-1;+\infty[$ بـ :

$u(x)=-x^2$ و $v(x)=\ln(x+1)$

وليكن (C_u) ، (C_v) تمثيلهما البيانيان في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (انظر الشكل المقابل)

1. بقراءة بيانية ادرس الوضع النسبي بين (C_u) و (C_v) على المجال $]-1;+\infty[$

2. أ) بين أن الدالة $x\mapsto(x+1)\ln(x+1)-x$ هي دالة أصلية لدالة $x\mapsto\ln(x+1)$ على المجال $]-1;+\infty[$

ب) $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المحدد بـ (C_u) و (C_v) و المستقيمين ذا المعادلتين $x=0$ و $x=1$ ، احسب بـ cm^2 المساحة $\mathcal{A}$

3. g دالة معرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ : $g(x)=\ln(x+1)+x^2$ ، استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

II. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ :

$f(x)=3(x+1)\ln(x+1)+x^3-3x$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. احسب $\lim\limits_{x\to -1^{+}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. أ) بين أنه من اجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=3g(x)$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3. أنشئ (C_f) على المجال $]-1;2]$ في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

التمرين الرابع :(05 نقاط)

I. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=0$ و من اجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1}=2u_n+1$

1. أ) احسب u_1 ، u_2 و u_3

ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n=2^n-1$

2. لتكن (v_n) و (w_n) متتاليتين معرفتين على $\mathbb{N}$ بـــ : $v_n=u_n+3$ و $w_n=2^n$

أ) بين أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q

ب) احسب بدلالة n ، S_n و S_n' و S_n''

حيث : $S_n=w_0+w_1+\dots+w_n$ ، $S_n'=v_0+v_1+\dots+v_n$ و $S_n''=u_0+u_1+\dots+u_n$

II. نعتبر في هذا الجزء انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ فان جميع حدود المتتاليتين (u_n) و (v_n) من $\mathbb{N}$

1. عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للحدين u_n و v_n

2. أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 3

ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $v_n\equiv 0[3]$

ج) استنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل الحدين u_n و v_n أوليين فيما بينهما

3. بين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ فان $S_n''\equiv S_n'[3]$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (**03نقاط**) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(3;0;0)$ ، $B(0;6;0)$ ، $C(0;0;4)$ و $D(-5;0;1)$

1. أ) بين أن النقط A ، B و C تشكل مستو.

ب) تحقق أن الشعاع $\vec{v}(4;2;3)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

ج) استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

2. أ) أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) العمودي على المستوي (ABC) و المار من النقطة D

ب) عين إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC)

ج) استنتج المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC)

التمرين الثاني :(**04نقاط**):

1. نعتبر العدد المركب $z=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}}$

أ) احسب z^2 ثم عين طويلة وعمدة للعدد المركب z^2

ب) عين طويلة وعمدة للعدد المركب z

ج) استنتج القيمة المضبوطة لـ: $cos\dfrac{5\pi}{12}$ و $sin\dfrac{5\pi}{12}$

2. المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$

نعتبر النقاط A; B; M ذات اللواحق $z_A=\dfrac{1}{2}$ ، $z_B=i$ حيث $z\neq i$ على الترتيب ، نضع: $L=\dfrac{1-2z}{1+iz}$

أ) بين أن : $|L|=2\dfrac{AM}{BM}$

ب) (E) مجموعة النقط من المستوي التي تحقق : $|L|=2$ ، عين ثم أنشئ المجموعة (E)

ج) (F) مجموعة النقط من المستوي بحيث يكون L حقيقي ، عين ثم أنشئ المجموعة (F)

التمرين الثالث : (**06نقاط**):

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، الوحدة $1cm$

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$

1. ادرس تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$

2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$

II. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$ بـ : $f(x)=e^{-x}\ln(e^{x}+1)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. أ) احسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

ب) فسر النتيجتين هندسيا

2. أ) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x)=e^{-x}g(e^{x})$

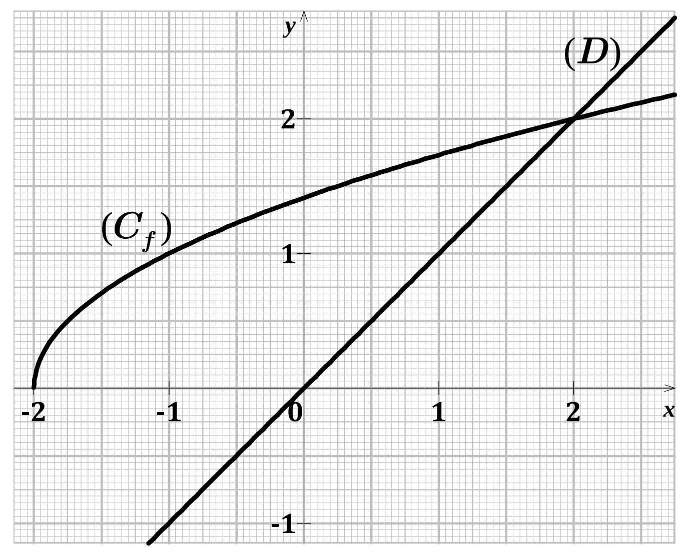
ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

3. أنشئ $\left(C_f\right)$ في المعلم $\left(O\,;\vec{i};\vec{j}\right)$

4. أ) بين أن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x)=x-(e^{-x}+1)\ln(e^{x}+1)$ هي دالة أصلية لدالة f على $\mathbb{R}$

ب) $\mathscr{A}$ مساحة الحيز المحدد بـ $\left(C_f\right)$ و المستقيمات $y=0$ و $x=0$ و $x=\ln 2$ ، احسب بـ cm^2 المساحة $\mathscr{A}$

التمرين الرابع : (04 نقاط)



لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+2}$

و (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$

1. بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-2;+\infty[$

2. الشكل المقابل يمثل المنحنى (C_f) للدالة f على المجال $]-2;+\infty[$ والمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$.

أ) أنقل الشكل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 و u_2 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<2$

د) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)،ثم استنتج أن (u_n) المتتالية متقاربة .

3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}\left(2-u_n\right)$

ب) استنتج انه أجل كل عدد طبيعي $n\ge 1$: $2-u_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

ج) استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الخامس : (03 نقاط)

1. نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $8x-6y=22$ ....(1)

أ) بين أن المعادلة (1) تقبل حلول في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) عين حلا خاصا $\left(x_0\,;y_0\right)$ للمعادلة (1) الذي يحقق $x_0-y_0=3$

ج) حل في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (1)

2. نعتبر a و b عددان طبيعيان حيث $(a\,;b)$ حل للمعادلة (1) ، نضع $p\,gcd\left(a\ ;\ b\right)=d$

أ) عين القيم الممكنة لـ d

ب) اوجد الثنائيات $(a\,;b)$ التي تحقق المعادلة (1) و $p\,gcd\left(a\ ;\ b\right)=11$

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

اختبار مادة : الرياضيات | **المستوى: الثالثة ثانوي** | **الشعبة : تقني رياضي**

محاور الموضوع	عناصر الإجابة الموضوع الأول	العلامة مجزاة	العلامة المجموع
الهندسة في الفضاء	التمرين الأول (03نقاط):		03

التمرين الأول (03نقاط):

1. .... **1.5**

أ) برهان أن (P) و (Q) متعامدان:

$\overrightarrow{n_{(P)}}(-2;1;5)$ ، $\overrightarrow{n_{(Q)}}(1;2;0)$ و لدينا : $\overrightarrow{n_{(P)}}.\overrightarrow{n_{(Q)}}=0$

الشعاعان $\overrightarrow{n_{(P)}}$ و $\overrightarrow{n_{(Q)}}$ متعامدان إذن المستويان (Q) و (Q) متعامدان

ب) برهان أن تقاطع (P) و (Q) هو مستقيم (Δ) يشمل النقطة $C(-1,4,-1)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(2,-1,1)$:

لدينا : $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{n_{(P)}}=0$ و $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{n_{(P)}}=0$ ومنه : $(\Delta)\subset(P)$

و $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{n_{(Q)}}=0$ و $C\in(Q)$ ومنه : $(\Delta)\subset(Q)$

إذن : $(P)\cap(Q)=(\Delta)$

ج) حساب بعد النقطة A عن المستوي (P) ثم بعد النقطة A عن المستوي (Q):

لدينا : $(P):-2x+y+5z-1=0$

$$d(A;(P))=\frac{|-2(5)+(-2)+5(-1)-1|}{\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(5)^2}}=\frac{18}{\sqrt{30}}\ u.m$$

$$d(A;(Q))=\frac{|5+2(-2)-7|}{\sqrt{(1)^2+(2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}\ u.m$$

د) حساب بعد A عن المستقيم (Δ) :

$$d(A;(\Delta))=\sqrt{d^2(A;(Q))+d^2(A;(P))}=\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{18}{\sqrt{30}}\right)^2}=3\sqrt{2}\ u.m$$

2. .... **1.5**

أ) حساب بدلالة t الطول AM_t :

$$AM_t=\sqrt{6t^2-24t+42}$$

ب) دارسة تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ، مع تحديد قيمتها الحدية الصغرى :

$$\lim_{x\to-\infty}f(t)=+\infty\quad;\quad\lim_{x\to+\infty}f(t)=+\infty$$

$$f'(t)=\frac{6t-12}{\sqrt{6t^2-24t+42}}$$

جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

t	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(t)$		-	**0**	+	
$f(t)$	$+\infty$	↘	$3\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة f :لدينا $f'(x)$ تنعدم من اجل القيمة 2 و تغير إشارتها عندها ،و الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;2]$ و متزايدة تماما على المجال $[2;+\infty[$ إذن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى على $\mathbb{R}$ قيمتها $f(2)=3\sqrt{2}$

ج) تفسير الهندسي للقيمة الحدية الصغرى للدالة f :

القيمة الحدية الصغرى للدالة f هندسيا هي البعد (الطول الأصغري) بين النقطة A والمستقيم (Δ)

الأعداد المركبة

05

التمرين الثاني (05نقاط):

0.5

1. حلول المعادلة $\left(z+\sqrt{3}+i\right)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=0$ ذات المجهول المركب z : ....

$$S=\left\{-\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i\ ;\ \sqrt{3}-i\right\}$$

2.5

2. ....

أ) حساب $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_C|$

$$|z_A|=|z_B|=|z_C|=2$$

ب) استنتاج أن النقاط A ، B و C تنتمي إلى دائرة (Γ) يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها:

$$|z_A-z_O|=|z_B-z_O|=|z_C-z_O|=2$$

ومنه نستنتج أن النقاط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي مركزها O ونصف قطرها 2

ج) إنشاء (Γ) و النقاط A ، B و C في المعلم $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$:

د) إيجاد z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع:

لدينا الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

يكافئ : $z_B-z_A=z_C-z_D$

يكافئ : $z_D=z_A-z_B+z_C$

ومنه : $z_D=\left(\sqrt{3}+i\right)-\left(\sqrt{3}-i\right)+\left(-\sqrt{3}-i\right)=-\sqrt{3}+i$

هـ) تعيين قيم العدد الطبيعي حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ حقيقي :

لدينا : $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n=\left(\frac{z_A\times z_B\times z_C}{8}\right)^n=\left(\frac{z_A\times\overline{z_A}\times e^{i®}z_A}{8}\right)^n=\left(\frac{e^{i®}z_A}{2}\right)^n$

ولدينا كذلك : $z_A=2e^{i\frac{®}{6}}$ ومنه نجد: $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n=e^{i\frac{7®}{6}n}$

يكون العدد $\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n$ حقيقي إذا و فقط إذا كانت

$$\arg\left(\left(\frac{z_A}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_B}{2}\right)^n\times\left(\frac{z_C}{2}\right)^n\right)=k\times®\quad;\ k\in\mathbb{Z}$$

ومنه نجد : $\frac{7®}{6}n=k\times®$ وعليه نجد : $7n=6k$ إذن : $7n\equiv0[6]$

وبما أن : $pgcd(6;7)=1$ فان : $n\equiv0[6]$

2

3. ....

أ) تعيين طبيعة التحويل النقطي S ، مع تحديد عناصره المميزة:

التحويل النقطي S هو تشابه مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\frac{-3+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}=1+i\sqrt{3}$

ونسبته $\left|1-i\sqrt{3}\right|=2$ و زاويته $\arg\left(1-i\sqrt{3}\right)=-\frac{®}{3}+k\times2®\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

ب) تعيين ثم انشاء $(\mathcal{E})$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي المركب التي تحقق:

$$\left(z-z_A\right)\left(\overline{z-z_A}\right)=\left(z-z_C\right)\left(\overline{z-z_C}\right)$$

لدينا : $\left(z-z_A\right)\left(\overline{z-z_A}\right)=\left(z-z_C\right)\left(\overline{z-z_C}\right)$

معناه : $\left|z_{\overline{AM}}\right|^2=\left|z_{\overline{CM}}\right|^2$

أي : $AM^2=CM^2$

ومنه : $AM=CM$ أو $AM=-CM$

وبما أن AM و CM عبارة عن أطوال إذن: $AM = CM$

وبالتالي مجموعة النقط $(\mathcal{E})$ عبارة عن محور القطعة $[AC]$

ج) تعيين ثم إنشاء المجموعة $(\mathcal{E}')$ صورة المجموعة $(\mathcal{E})$ بالتحويل النقطي S :

لتكن النقاط A' ، C' و M' حيث : $S(A) = A'$ ، $S(C) = C'$ و $S(M) = M'$

لدينا : $\frac{C'M'}{CM} = \frac{A'M'}{AM}$ ومنه: $\frac{CM}{AM} = \frac{C'M'}{A'M'}$ أي : $\frac{C'M'}{A'M'} = 1$

وبالتالي نجد : $A'M' = C'M'$

إذن مجموعة النقط $(\mathcal{E}')$ عبارة عن محور القطعة $[A'C']$

	التمرين الثالث (07نقاط):		

I.

1. دراسة الوضع النسبي بين التمثلين البيانيين (C_u) و (C_v): **1**

من التمثليين البيانيين (C_u)و (C_v) نجد :

- ✓ على المجال $]-1\,;0[$: (C_u)يقع فوق (C_v)
- ✓ لما $x=0$: (C_v)يقطع (C_v)
- ✓ على المجال $]0;+\infty[$: (C_u)يقع تحت (C_v)

2. .... **1.5**

أ) تبين أن الدالة $x\mapsto(x+1)\ln(x+1)-x$ هي دالة أصلية لدالة $x\mapsto\ln(x+1)$:

لدينا الدالة $x\mapsto(x+1)\ln(x+1)-x$ قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$

من اجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا : $((x+1)\ln(x+1)-x)'=\ln(x+1)$

ومنه الدالة $x\mapsto(x+1)\ln(x+1)-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\ln(x+1)$

ب) حساب بـ cm^2 المساحة $\mathscr{A}$:

$$A=1\times1\left[\int_0^1\left(\ln(x+1)+x^2\right)dx\right]=\left[\left((x+1)\ln(x+1)-x\right)+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1\approx0.72\,cm^2$$

3. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$: **1**

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$	‖	-	0	+	

II.

1. حساب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: **0.5**

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}}f(x)=2$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. .... **1.5**

أ) تبيين انه من اجل كل x من $]-1;+\infty[$ لدينا: $f'(x)=3g(x)$:

$$f'(x)=\left(3(x+1)\ln(x+1)+x^3-3x\right)'=3\left(\ln(x+1)+x^2\right)=3g(x)$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $]-1;+\infty[$ ، مع تشكيل جدول تغيراتها:

دراسة إشارة $f'(x)$: من اجل كل x من $]0;+\infty[$ ، لدينا: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	

الدوال العددية

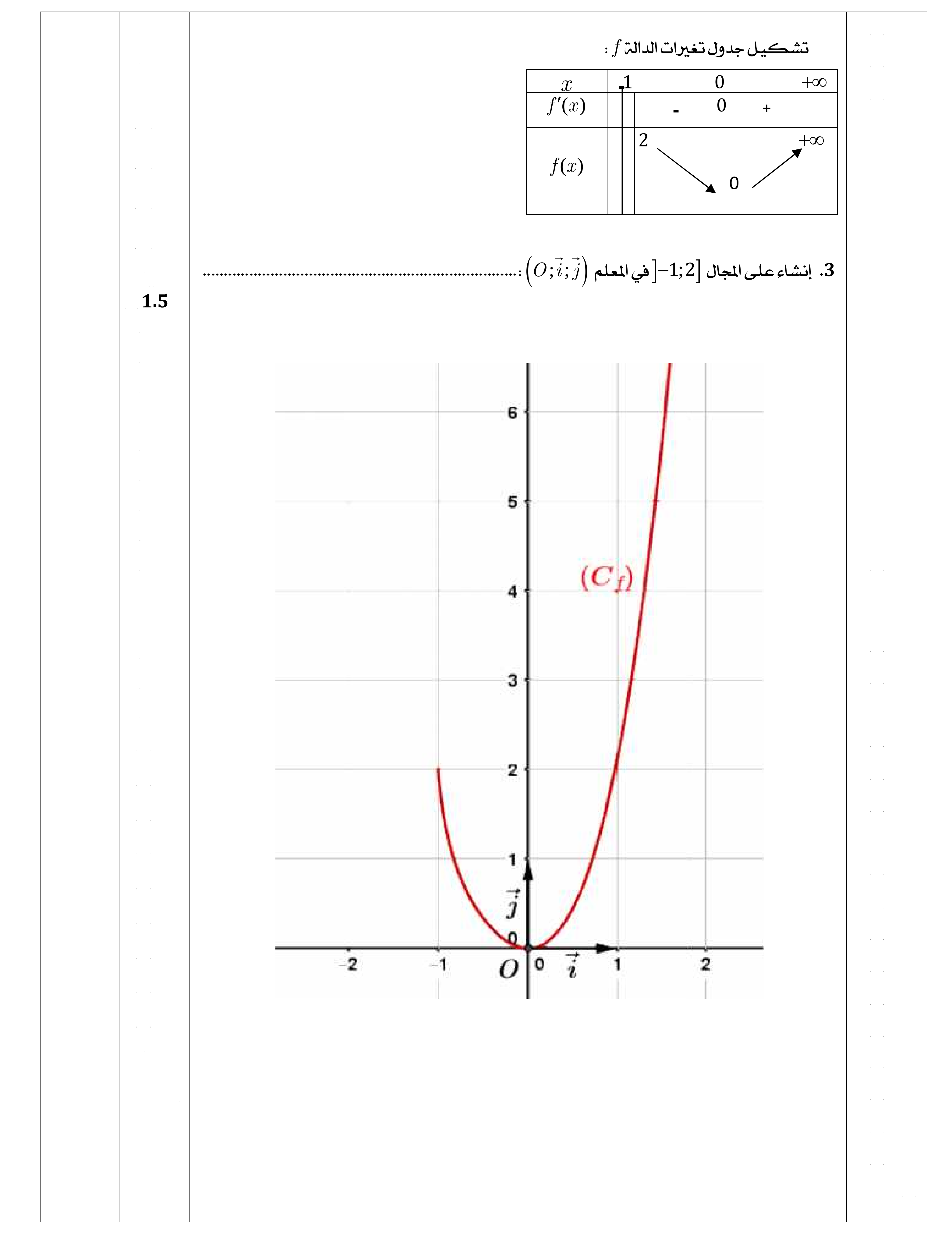
07

تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ 2	↘	0	↗	$+\infty$

1.5

3. إنشاء على المجال $]-1;2]$ في المعلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$:..



المحور		العلامة	المجموع
المتتاليات العددية	**التمرين الرابع (05نقاط)**		
	.I		
	.1	1	
	أ) حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 :		
	$u_1=1$ ، $u_2=3$ ، $u_3=5$		
	ب) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2^n-1$:		
	نبرهن بالتراجع على الخاصية $P(n)$ ($P(n)$: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2^n-1$)		
	المرحلة الأولى : من اجل $n=0$ لدينا : $u_0=2^0-1=1-1=0$ الخاصية $P(0)$ صحيحة		
	المرحلة الثانية :ليكن k عدد طبيعي كيفي		
	نفرض أن الخاصية $P(k)$ صحيحة أي أن $u_k=2^k-1$ ، ونبرهن صحة الخاصية $P(k+1)$		
	لدينا : $u_{k+1}=2u_k+1$ ومنه: $u_{k+1}=2(2^k-1)+1$ ومنه : $u_{k+1}=2^{k+1}-1$		
	وبالتالي فان الخاصية $P(k+1)$ صحيحة		
	إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فان $u_{k+1}=2^{k+1}-1$		05
	.2	1.5	
	أ) تبيين أن المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q :		
	لدينا : $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{2^{n+1}}{2^n}=2$		
	ومنه المتتالية (w_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها $q=2$		
	ب) حساب بدلالة n ، S_n ، S'_n و S''_n :		
	$S_n=2^{n+1}-1$ ، $S'_n=2^{n+1}-(n+2)$ ، $S''_n=2^{n+1}+2n+1$		
الحساب و الأعداد	**.II**		
	.1 تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للحدين u_n و u_n :	0.5	
	ليكن $p\gcd(u_n;v_n)=d$ ومنه : d/u_n و d/v_n إذن : d/v_n-u_n أي : $d/3$		
	وبالتالي القيم الممكنة لـ : $d\in D_3=\{1\ ;\ 3\}$		
	.2	1.5	
	أ) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 3:		
	n : $2k$ ، $2k+1$ — بواقي قسمة 2^n على 3 : 1 ، 2		
	ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق $v_n\equiv 0[3]$:		
	لدينا : $v_n\equiv 0[3]$ معناه أن : $2^n\equiv -2[3]$ وبما أن: $-2\equiv 1[3]$ إذن : $2^n\equiv 1[3]$		
	وبالتالي نجد : $n=2k$; $k\in\mathbb{N}$		
	ج) استنتاج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تجعل $p\gcd(u_n;v_n)=1$:		
	نعلم أن $v_n\equiv 0[3]$ لما $n=2k$; $k\in\mathbb{N}$ وكذلك نجد أن : $u_n\equiv 0[3]$ لما $n=2k'$; $k'\in\mathbb{N}$		
	أي في هذه الحالة نجد : $p\gcd(u_n;v_n)=3$ لكن القيم الممكنة لـ d هي : 3 ; 1 إذن حتى		
	يكون $p\gcd(u_n;v_n)=1$ يجب أن يكون $n=2q+1$; $q\in\mathbb{N}$		
	.3 تبيين انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ فان $S''_n\equiv S'[3]$:	0.5	
	لدينا : $S''_n-S'=3(n+1)$ تكافئ أن : $S''_n-S'=0[3]$ تكافئ أن : $S''_n\equiv S'[3]$		

Table inside II.2 أ:

n	$2k$	$2k+1$
بواقي قسمة 2^n على 3	1	2

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

اختبار مادة : الرياضيات **المستوى: الثالثة ثانوي** **الشعبة : تقــني رياضــي**

محاور الموضوع	عناصر الإجابة الموضوع الثاني	مجزاة	المجموع
الهندسة في الفضاء	**التمرين الأول** :(03نقاط) 1. .... أ) تبيين أن النقاط A ، B و C تشكل مستو: $\overrightarrow{AB}(-3;6;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(-3;0;4)$ ولدينا: $\frac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{AC}}} \neq \frac{y_{\overrightarrow{AB}}}{y_{\overrightarrow{AC}}}$ إذن فان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا وبالتالي النقاط A ، B و C تشكل مستو ب) تحقق من أن الشعاع $\vec{v}(4;2;3)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) : لدينا: $\overrightarrow{AC}.\vec{v}=0$ و $\overrightarrow{AB}.\vec{v}=0$ ومنه فان $\vec{v}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) ج) استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) $(ABC): 4x+2y+3z-12=0$	1.5	03
	2. .... أ) إيجاد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) العمودي على المستوي (ABC) و المار من النقطة D : بما أن المستقيم (d) عمودي على المستوي (ABC) فان الشعاع $\vec{v}(4;2;3)$ شعاع توجيه للمستقيم (d) ومنه نجد : $(d):\begin{cases} x=-5+4t \\ y=2t \\ z=1+3t \end{cases} \; ; \; t\in IR$ ب) تعيين إحداثيات النقطة H ،نقطة تقاطع المستقيم (d) والمستوي (ABC) : لتكن النقطة $H(x_H;y_H;z_H)$ لدينا النقطة H من المستوي (ABC) معناه : $4x_H+2y_H+3z_H-12=0$ ....(1) ولدينا النقطة H من المستوي (d) معناه : $\begin{cases} x_H=-5+4t.....(2) \\ y_H=2t............(3) \\ z_H=1+3t........(4) \end{cases} \; ; \; t\in IR$ بتعويض (2) و (3) و(4) في (1) نجد $t=1$ ومنه : $H(-1;2;4)$ ج) استنتاج المسافة بين النقطة و المستوي (ABC) : $DH=\sqrt{(-4)^2+(2)^2+(3)^2}=\sqrt{29}\,u.m$	1.5	

الأعداد المركبة

التمرين الثاني (04نقاط):

.1 2

أ) حساب z^2 ، ثم تعيين طويلة وعمدة للعدد المركب z^2 :

$$z^2=-\sqrt{3}+i$$

$$\left|z^2\right|=\left|-\sqrt{3}+i\right|=2$$

$$\arg\left(z^2\right)=\arg\left(-\sqrt{3}+i\right)=\frac{5\pi}{6}+k\times 2\pi \quad ; k\in\mathbb{Z}$$

ب) تعيين طويلة و عمدة للعدد المركب z :

لدينا : $\left|z^2\right|=\left|z\right|^2$ ومنه $\left|z\right|^2=2$ وبالتالي : $\left|z\right|=\sqrt{2}$

ولدينا كذلك : $\arg\left(z^2\right)=2\arg\left(z\right)$

ومنه : $2\arg\left(z\right)=\frac{5\pi}{6}+k\times 2\pi$

وبالتالي : $\arg\left(z\right)=\frac{5\pi}{12}+k\times\pi$ مع $k\in\left\{0;1\right\}$

لما : $k=0$ فان $\arg\left(z\right)=\frac{5\pi}{12}$

لما : $k=1$ فان $\arg\left(z\right)=\frac{17\pi}{12}$

وبما أن : $Re\left(z\right)>0$ و $\operatorname{Im}\left(z\right)>0$ فان : $\arg\left(z\right)=\frac{5\pi}{12}$

ج) استنتاج القيمة المضبوطة لـ $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$:

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}+i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

.2 2

أ) تبيين أن : $\left|L\right|=2\frac{AM}{BM}$

$$L=\frac{1-2z}{1+iz}=\frac{-2\left(z-\frac{1}{2}\right)}{i\left(z-i\right)}=\frac{-2}{i}\times\frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)}{z-i}=2i\times\frac{z-\frac{1}{2}}{z-i}$$

$$\left|L\right|=\left|2i\times\frac{z-\frac{1}{2}}{z-i}\right|=\left|2i\right|\left|\frac{z-\frac{1}{2}}{z-i}\right|=2\frac{\left|z-\frac{1}{2}\right|}{\left|z-i\right|}=2\frac{AM}{BM}$$

ب) تعيين وإنشاء المجموعة $\left(E\right)$:

لدينا : $\left|L\right|=2$ معناه : $2\frac{AM}{BM}=2$

أي : $\frac{AM}{BM}=1$

ومنه : $AM=BM$

وبالتالي مجموعة النقط $\left(E\right)$ عبارة عن محور القطعة $\left[AB\right]$

04

ج) تعيين وإنشاء المجموعة (F) :

لدينا: L حقيقي يكافئ أن: $\arg(L) = k \times ®$

ولدينا كذلك : $\arg(L) = \arg\left(2i \times \dfrac{z - \frac{1}{2}}{z - i}\right) = \arg(2i) + \arg\left(\dfrac{z - \frac{1}{2}}{z - i}\right)$

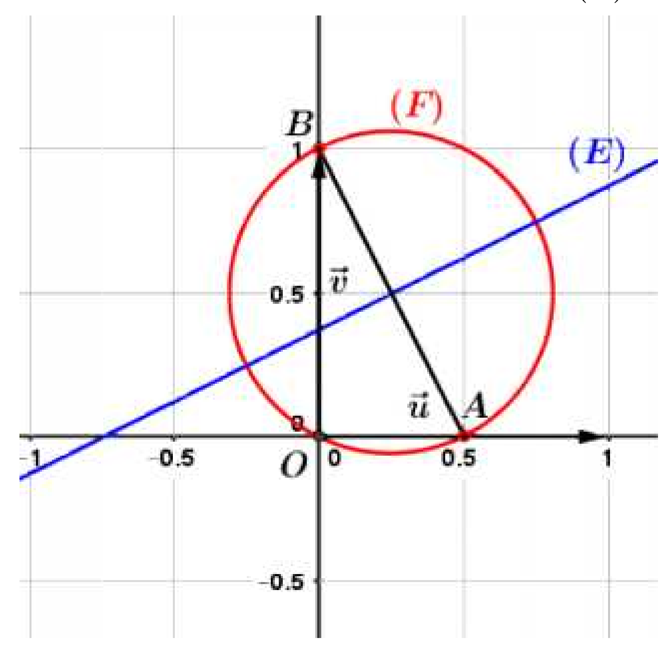
وبما أن : $\arg\left(\dfrac{z - \frac{1}{2}}{z - i}\right) = \left(\overrightarrow{BM} ; \overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MA}\right)$

و $\arg(2i) = \dfrac{®}{2}$

فان : $\arg(L) = \left(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MA}\right) + \dfrac{®}{2}$

وبالتالي نجد : $\left(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MA}\right) = -\dfrac{®}{2} + k \times ®$

إذن مجموعة النقط (F) عبارة عن دائرة قطرها AB عدا النقطتين A و B



06		التمرين الثالث (06نقاط):	

التمرين الثالث (06نقاط):

.I

1. دراسة تغيرات الدالة g على $[0;+\infty[$: **1.5**

أ) النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة g على $[0;+\infty[$:

حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{-x}{(x+1)^2}$$

دراسة إشارة $g'(x)$:

لدينا من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $(x+1)^2 > 0$

ومنه إشارة $g'(x)$ تعتمد على إشارة البسط $-x$

لدينا من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $-x \le 0$

وبالتالي : من اجل كل x من $[0;+\infty[$: $g'(x) \le 0$

ج) تشكيل جدول تغيرات الدالة g على المجال $[0;+\infty[$:

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	0 $\qquad$ -
$g(x)$	0 ↘ $-\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$: **0.5**

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	0 $\qquad$ -

.II

1. .... **0.5**

أ) حساب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)$:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

ب) التفسير الهندسي :

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أفقيين معدلتيهما $y = 0$ و $y = 1$

2. .... **1.5**

أ) تبيين انه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{-x}g(e^x)$

$$f'(x) = (e^{-x}\ln(e^x+1))' = e^{-x}\left(\frac{e^x}{e^x+1} - \ln(e^x+1)\right) = e^{-x}g(e^x)$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^{-x} > 0$

ولدينا كذلك من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x > 0$

وبما أن $g(x)$ سالبة على المجال $[0;+\infty[$

فان $g(e^x) < 0$

وبالتالي : من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) < 0$

الدوال العددية

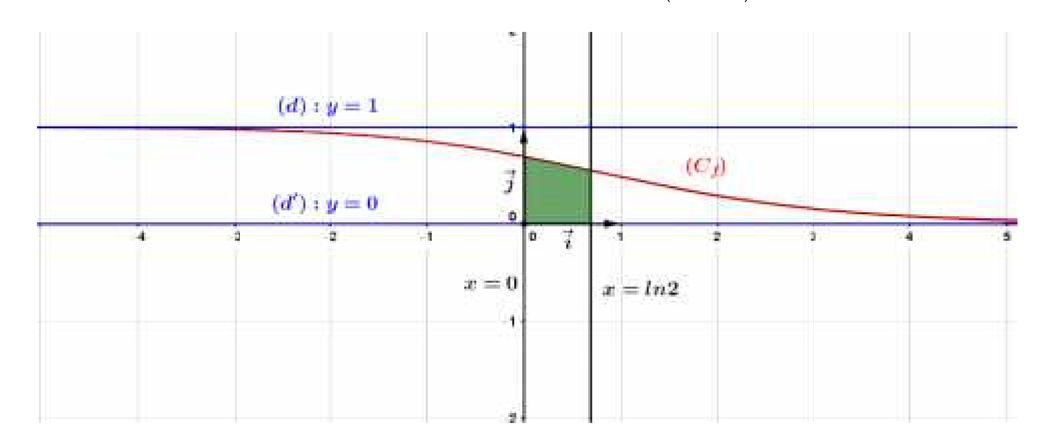
تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	1 ↘ 0

الدوال العددية

1

3. إنشاء (C_f) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ ....



1

4. ....

أ) تبيين أن الدالة $F(x) = x - (e^{-x}+1)\ln(e^{x}+1)$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

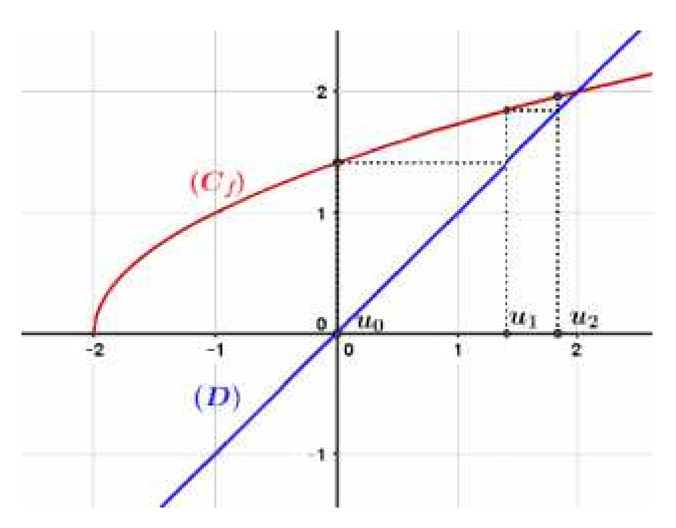
لدينا الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$F'(x) = \left(x - (e^{-x}+1)\ln\left(e^{x}+1\right)\right)' = e^{-x}\ln\left(e^{x}+1\right) = f(x)$$

ومنه الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

ب) حساب بـ cm^2 المساحة $\mathcal{A}$:

$$A = 1\times 1\left[\int_0^{\ln 2}\left(e^{-x}\ln\left(e^{x}+1\right)\right)dx\right] = \left[x - \left(e^{-x}+1\right)\ln\left(x+1\right)\right]_0^{\ln 2} \approx 0.43\,cm^2$$

	0.5 2	**التمرين الرابع** (04 نقاط) **1.** تبيين أن الدالة f متزايدة تماما على $]-2;+\infty[$: .... $$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$ لدينا من اجل كل x من $]-2;+\infty[$: $f'(x)>0$ إذن من اجل كل x من $]-2;+\infty[$ الدالة f متزايدة تماما . **2.** .... أ) تمثيل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 : 	
المتتاليات العددية		ب) بتخمين (تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل) يبدو لنا أن المتتالية (u_n) متناقصة و تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (D) ج) برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\le u_n<2$: نبرهن بالتراجع على الخاصية $P(n)$) $P(n)$: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\ge 0$) المرحلة الأولى : من اجل $n=0$ لدينا : $0\le u_0=0<2$ الخاصية $P(0)$ صحيحة المرحلة الثانية :ليكن k عدد طبيعي كيفي نفرض أن الخاصية $P(k)$ صحيحة أي أن $0\le u_k<2$ ، ونبرهن صحة الخاصية $P(k+1)$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]-2;+\infty[$ وهي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) فان : $f(0)\le f(u_k)<f(2)$ ومنه نجد : $0\le\sqrt{2}\le u_{k+1}<2$ وبالتالي فان الخاصية $P(k+1)$ صحيحة إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فان $0\le u_n<2$ د) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ،مع استنتاج أن (u_n) متتالية متقاربة : لدينا : $$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_n+2}-u_n=\frac{\left(\sqrt{u_n+2}-u_n\right)\left(\sqrt{u_n+2}+u_n\right)}{\left(\sqrt{u_n+2}+u_n\right)}$$ $$=\frac{-u_n^{\ 2}+u_n+2}{\sqrt{u_n+2}+u_n}=\frac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{u_n+2}+u_n}$$ وبما أن : $\sqrt{u_n+2}+u_n>0$ و $2-u_n\ge 0$ و $u_n+1\ge 0$ فان $\frac{(u_n+1)(2-u_n)}{\sqrt{u_n+2}+u_n}>0$ وبالتالي: $u_{n+1}-u_n>0$	

		أي (u_n) متتالية متزايدة تماما وبما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومحدودة فهي محدودة من الأعلى بالعدد 2 فان المتتالية (u_n) متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$		
	1.5	3. .... أ) تبيين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(2-u_n)$: $2-u_{n+1} = 2-\sqrt{u_n+2} = \frac{(2-\sqrt{u_n+2})(2+\sqrt{u_n+2})}{(2+\sqrt{u_n+2})}$ $= \frac{4-u_n-2}{(2+\sqrt{u_n+2})} = \frac{2-u_n}{(2+\sqrt{u_n+2})}$ وبما أن : $\frac{1}{2+\sqrt{u_n+2}} \le \frac{1}{2}$ فان : $2-u_{n+1} \le \frac{1}{2}(2-u_n)$ ب) استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $2-u_{n+1} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$: من (أ) نجد: $\frac{2-u_{n+1}}{2-u_n} \le \frac{1}{2}$ ومنه : $\frac{2-u_1}{2-u_0} \le \frac{1}{2}$ $\frac{2-u_2}{2-u_1} \le \frac{1}{2}$ .... $\frac{2-u_n}{2-u_{n-1}} \le \frac{1}{2}$ وبالتالي: $\frac{2-u_1}{2-u_0} \times \frac{2-u_2}{2-u_1} \times \ldots\ldots \times \frac{2-u_n}{2-u_{n-1}} \le \overbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \ldots \times \frac{1}{2}}^{n}$ $\frac{2-u_n}{2-u_0} \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $2-u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ج) استنتاج $\lim_{n\to+\infty} u_n$: من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < 2-u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ومنه : $0 \le \lim_{n\to+\infty}(2-u_n) \le \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ وبالتالي : $\lim_{n\to+\infty}(2-u_n) = 0$ ومنه نجد : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$		

الأعداد والحساب

التمرين الخامس (03 نقاط)

1. .... 1.5

أ) تبيين أن المعادلة (1) تقبل حلول في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

لدينا : $p\gcd(8\ ;\ 6) = 2$ و $2 / 22$ إذن المعادلة (1) تقبل حلول في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) تعيين حلا خاصا للمعادلة (1) تقبل حلول في المجموعة $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

لدينا: $x_0 - y_0 = 3$ تكافئ: $x_0 = 3 + y_0$ ....(2)

بتعويض (2) في (1) نجد: $y_0 = -1$ و منه : $x_0 = 2$

و بالتالي الثنائية $(2\ ;-1)$ هي حل خاص للمعادلة (1)

ج) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة (1) :

لدينا : $8x - 6y = 22$ تكافئ : $4x - 3y = 11$ .... (3)

ومنه نجد : $4x - 3y = 11$ .... (3)

$4(2) - 3(-1) = 11$ .... (4)

بطرح (4) من (3) نجد :

$$4(x-2) - 3(y+1) = 0$$

ومنه : $4(x-2) = 3(y+1)$

بتطبيق مبرهنة غوص نجد : $x = 3k+2$ و $y = 4k-1$

وبالتالي : $S = \{(3k+2\ ;\ 4k-1)\ ; k\in\mathbb{Z}\}$

2. .... 1.5

أ) تعيين القيم الممكنة $p\gcd(a\,;b) = d$:

لدينا : $p\gcd(a\,;b) = d$ ومنه : d / a و d / b إذن : $d / 4a - 3b$ أي : $d / 11$

$$d \in D_{11} = \{1\ ;\ 11\}$$

ب) تعيين الثنائيات $(a\,;b)$ التي تحقق المعادلة (1) و $p\gcd(a\,;b) = 11$:

لدينا : $a = 3k+2$ و $b = 4k-1$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

و باستعمال خوارزمية إقليدس نجد :

$$4k-1 = (3k+2)\times 1 + (k-3)$$

$$3k+2 = (k-3)\times 3 + 11$$

ومنه : $p\gcd(a\,;b) = p\gcd(3k+2\,;4k-1) = p\gcd(k-3\,;11)$

وبالتالي : $p\gcd(a\,;b) = 11$ يكافئ أن : $p\gcd(k-3\,;11) = 11$

يكافئ أن : $k - 3 = 11k'\ \ ;k'\in\mathbb{N}$

يكافئ أن : $k = 11k' + 3\ \ ;k'\in\mathbb{N}$

ومنه الثنائيات $(a\,;b)$ المطلوبة هي : $\{(33k'+11\ ;\ 44k'+11)\ ;k'\in\mathbb{N}\}$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | مديرية التربية لولاية الشلف | ثانوية بلحاج قاسم نور الدين

امتحان البكالوريا التجريبي | الشعبة : علوم تجريبية | المدة : 3 ساعات و نصف

التاريخ : 03 ماي 2012 | السنة الدراسية : 2011 ـ 2012

اختبار في مادة الرياضيات

على كل مترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$.

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n>4$.

ب) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة . عين نهاية المتتالية (u_n).

2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـ : $v_n=\ln(u_n-4)$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

ب) أحسب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$.

ج) أحسب نهاية المتتالية (u_n).

د) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+...+u_n$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعرف بـ : $P(z)=z^3-z^2+3z+5$

1) بين أن العدد -1 حل للمعادلة $P(z)=0$ ثم عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون :

$P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$.

2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2-2z+5=0$ ثم استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$.

3) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A,B و C لواحقها على الترتيب $z_A=-1, z_B=1+2i$ و $z_C=1-2i$

أ) علم النقط A,B و C.

ب) عين الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

ج) ليكن S التحويل النقطي في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$z'=e^{-i\frac{\pi}{2}}z-1-i$

- عين طبيعة التحويل S و عناصره المميزة ثم بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتحويل S.

4) لتكن (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث M تختلف عن B و تختلف عن C بحيث يكون العدد $\frac{z_C-z}{z_B-z}$ تخيليا بحتا .

أ) بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (C)

ب) فسر هندسيا عمدة العدد المركب $\frac{z_C - z}{z_B - z}$ ثم عين طبيعة المجموعة (C) و عناصرها المميزة .

التمرين الثالث : (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;2;3)$ ، $B(2;1;3)$ و $C(2;-2;0)$

1) بين أن النقط A,B و C تعين مستويا .

2) بين أن $x+y-z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

3) لتكن $D(2,0,2)$ ، $E(-4;6;2)$ نقطتين من الفضاء . أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (DE).

4) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث ، $x^2+y^2+z^2-2x-2y-8z+14=0$

أ) بين أن (S) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω و نصف قطرها R.

ب) بين أن المستقيم (DE) هو مماس لسطح الكرة (S).

ج) بين أن المستوي (ABC) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تعيين نصف قطرها r.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = 2\ln(x) + \frac{x-1}{x}$.

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) أحسب $g(1)$ ثم أستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = (x-1)^2\ln(x) + x - 1$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب نهايتي الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0;+\infty[$ ، $f'(x) = (x-1)\times g(x) + 1$.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي 1.

5) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

6) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة الى المماس (T) . ماذا تستنتج بالنسبة الى النقطة $I(1;0)$؟

7) أ حسب $f(2);f(3)$ ثم أرسم (T) و (C_f).

C الموضوع الثاني

التمرين الأول : (03 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـــ : $u_0 = 0$ و $u_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n،

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$$

ونعرف المتتاليتين العدديتين (v_n) و (w_n) بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$ و $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

في كل ما يلي أجب بـــ " صحيح " أو " خاطئ " مع التبرير

1) (v_n) متتالية هندسية .

2) (w_n) متتالية ثابتة .

3) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$

4) (u_n)متتالية متباعدة .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(2;1;3)$، $B(-3;-1;7)$ و $C(3;2;4)$

1) بين أن النقط A, B و C ليست في استقامية .

2) ليكن المستقيم (D) المعرف بـــتمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ حيث $t \in \mathbb{R}$.

أ) بين أن المستقيم (D) يعامد المستوي (ABC).

ب) جد معادلة للمستوي (ABC).

3) لتكن H نقطة تقاطع المستوي (ABC) و المستقيم (D).

أ) بين أن النقطة H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$

ب) عين طبيعة (P) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\left(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CB} = 0$.

4) أدرس تقاطع المستوي (ABC) و المجموعة (P).

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $4z^2 - 2z + 1 = 0$.

2) ليكن Z عدد مركب حيث : $Z = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

أ) أكتب كلا من العددين Z و $\overline{Z}$ على الشكل المثلثي .

ب) نضع $L_k = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k - \left(\frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ حيث k عدد صحيح نسبي .

- بين أن $L_k = \frac{1}{2^{k-1}} i \sin\frac{k\pi}{3}$ ثم استنتج قيمة L_{2013}

3) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A,B ذات اللاحقتين $z_A = 2+2i\sqrt{3}$ و $z_B = 2-2i\sqrt{3}$ على الترتيب .

أ) علم النقطتين A,B.

ب) عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران R الذي مركزه النقطة A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

ج) عين طبيعة المثلث ABC.

د) عين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $|z-2+2i\sqrt{3}| = |z-2-2i\sqrt{3}|$ ثم أرسمها .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = xe^x - e^x + 1$.

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجموعة $\mathbb{R}$.

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x-2)e^x + x - 2$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4) أ)بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x-2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى (Δ).

ج) بين أن $I(0;-4)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

د) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1 أكتب معادلة ديكارتية له .

5) أرسم (Δ)، (T) و (C_f).

6) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث يكون للمعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$(E) : (x-2)e^x - 2 + m = 0$ حلين مختلفين في الاشارة .

مع تمنياتنا لكم بـالتوفيق و النجاح في البكالوريا

أساتذة المادة

C الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

- لدينا (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0=6$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+3$.

1) أ) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي $u_n>4$.

- نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1- من أجل $n=0$ لدينا :

$u_0=6$ و $6>4$ ومنه $u_0>4$ أي الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $u_n>4$ و نبرهن على صحة $P(n+1)$ أي نبرهن أن :

$u_{n+1}>4$

لدينا : $u_n>4$ ومنه $\frac{1}{4}u_n>\frac{1}{4}\times 4$ وبالتالي $\frac{1}{4}u_n+3>\frac{1}{4}\times 4+3$ إذن $u_{n+1}>4$

ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فان $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

أي $u_n>4$ من أجل كل عدد طبيعي n

ب) اثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

- ندرس اشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$:

- لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{4}u_n+3-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n=-\frac{3}{4}u_n+3$

- ولدينا : $u_n>4$ ومنه $-\frac{3}{4}u_n<-\frac{3}{4}\times 4$ وبالتالي $-\frac{3}{4}u_n+3<-\frac{3}{4}\times 4+3$

ومنه $u_{n+1}-u_n<0$ **أي المتتالية (u_n) متناقصة تماما**

- **استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :**

من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>4$ **إذن** (u_n) متتالية محدودة من الأسفل بالعدد 4.

و (u_n) **متناقصة تماما** وبالتالي **(u_n) متقاربة تتقارب من العدد 4**

تعيين نهاية (u_n) : $\lim_{n\to+\infty} u_n=4$

2) لدينا : $v_n=\ln(u_n-4)$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) حسابية :

(v_n) **متتالية حسابية معناه** $v_{n+1}=v_n+r$

- لدينا : $v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-4)=\ln\left(\frac{1}{4}u_n+3-4\right)$

أي $v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_n+12-16}{4}\right)=\ln\left(\frac{u_n-4}{4}\right)$ ومنه

$v_{n+1}=\ln\left(\frac{u_n-4}{4}\right)=\ln(u_n-4)-\ln(4)=v_n-\ln(4)$ أي $v_{n+1}=v_n-\ln(4)$

ومنه (v_n) **حسابية أساسها** $r=-\ln(4)$ **و حدها الأول** $v_0=\ln(u_0-4)=\ln(6-4)=\ln(2)$

ب) حساب عبارة الحد العام v_n **بدلالة** n:

- **لدينا** : $v_n=v_0+nr=\ln(2)-n\ln(4)$ $\quad v_n=-2n\ln(2)+\ln(2)$

- **استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي** n، $u_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$:

لدينا : $v_n=\ln(u_n-4)$ ومنه $e^{v_n}=u_n-4$

وبالتالي : $u_n=e^{-n\ln 4+\ln(2)}+4=e^{n\ln\left(\frac{1}{4}\right)}\times e^{\ln(2)}+4=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$ أي $u_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$

ج) حساب نهاية المتتالية (u_n):

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4\right)=4$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=0$ $\quad -1<\frac{1}{4}<1$

د) حساب المجموع بدلالة n : $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+...+u_n$.

- **لدينا** : $u_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n+4$ وهي عبارة عن مجموع متتاليتين عدديتين

- **متتالية هندسية** (w_n) عبارة حدها العام $w_n=2\left(\frac{1}{4}\right)^n$ أساسها $q=\frac{1}{4}$ و حدها الأول $w_0=2$

- **ومتتالية ثابتة** (a_n) عبارة حدها العام $a_n=4$

إذن : $S_n=w_0+w_1+...+w_n+a_0+a_1+...+a_n=w_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)+4(n+1)$

$$S_n=2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}\right)+4(n+1)$$ ومنه $$S_n=2\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}}\right)+4(n+1)$$

أي $S_n=2\times\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)+4(n+1)$

$$S_n=\frac{8}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)+4n+4=\frac{8}{3}+4-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+4n=\frac{20}{3}+4n-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$S_n=\frac{20}{3}+4n-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لدينا : $P(z)=z^3-z^2+3z+5$

1) تبيان العدد -1 حل للمعادلة $P(z)=0$:

لدينا : $P(-1)=(-1)^3-(-1)^2+3(-1)+5=-1-1-3+5=0$

أي $P(-1)=0$ ومنه العدد -1 حل للمعادلة $P(z)=0$:

- تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$.

لدينا : $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)=z^3+az^2+bz+z^2+az+b$

$P(z)=z^3+(a+1)z^2+(b+a)z+b$

- بالمطابقة نجد : $\begin{cases}a+1=-1\\ b+a=3\\ b=5\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=-2\\ b=5\end{cases}$

وبالتالي : $P(z)=(z+1)(z^2-2z+5)$

2) حل المعادلة $z^2-2z+5=0$ في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$:

- حساب المميز $\Delta=(-2)^2-4(1)(5)=4-20=-16=16i^2$

- أي $\Delta=16i^2=(4i)^2$ ومنه الجذران التربيعيان للعدد Δ هما : $\delta_1=4i$, $\delta_2=-4i$

المعادلة $z^2-2z+5=0$ تقبل حلين مركبين هما :

$z_1=\frac{-b+\delta_1}{2a}=\frac{2+4i}{2}=1+2i$ ، $z_2=\frac{-b-\delta_1}{2a}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$

- استنتاج حلول المعادلة $P(z)=0$:

- $P(z)=0$ معناه $(z+1)(z^2-2z+5)=0$

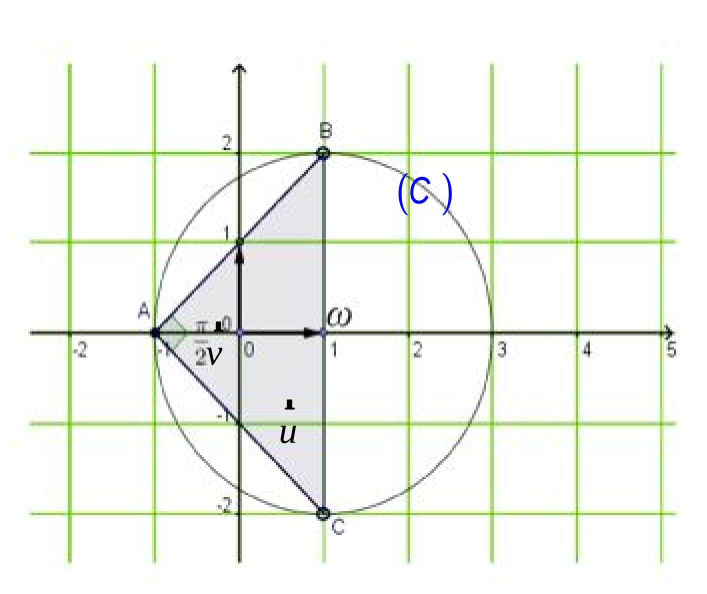
اما $z+1=0$ ومنه $z=-1$

أو $z^2-2z+5=0$

إما $z_1=1+2i$ أو $z_2=1-2i$

مجموعة حلول المعادلة $P(z)=0$:

$S=\{-1,1+2i,1-2i\}$



3) لدينا : $z_A=-1$, $z_B=1+2i$, $z_C=1-2i$

أ) تعليم النقط A,B,C :

ب) تعيين الطويلة و عمدة للعدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$:

- كتابة العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري :

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1-2i+1}{1+2i+1} = \frac{2-2i}{2+2i} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -\frac{2i}{2} = -i$$

$$\boxed{\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i}$$

- حساب الطويلة : $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |-i| = \sqrt{(-1)^2} = 1$

- تعيين عمدة للعدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

نضع $\theta = Arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ إذن $\begin{cases}\cos\theta = 0\\ \sin\theta = -1\end{cases}$ ومنه $\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

- استنتاج طبيعة المثلث ABC :



لدينا : $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1$ ومنه $AB = AC$

ولدينا : $Arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ومنه

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

أي $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ ومنه ABC مثلث قائم في النقطة A و متساوي الساقين .

ج) تعيين طبيعة التحويل S :

- التحويل S من الشكل $z' = az + b$ حيث $a = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ و $b = -1-i$

لدينا : $|a| = 1$ ومنه S دوران زاويته $\theta = Arg(a) = -\frac{\pi}{2}$

ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = \frac{b}{1-a} = \frac{-1-i}{1-(-i)} = \frac{-1-i}{1+i} = -\frac{1+i}{1+i} = -1$

$z_\Omega = -1 = z_A$

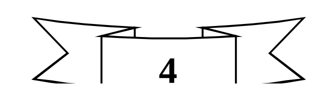
لأن $a = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i(-1) = -i$ ومنه مركز S هي النقطة A

- إثبات أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتحويل S :

نبين أن $z_C = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_B - 1 - i = -iz_B - 1 - i$

- لدينا : $e^{-i\frac{\pi}{2}} z_B - 1 - i = -i(1+2i) - 1 - i = -i + 2 - 1 - i = 1 - 2i = z_C$

ومنه C هي صورة النقطة B بالتحويل S



4) أ) إثبات أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (C):

- لدينا : $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ ومنه $A \in (C)$.

ب) التفسير الهندسي لعمدة العدد المركب $\frac{z_C - z}{z_B - z}$:

$$Arg\left(\frac{z_C - z}{z_B - z}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right)$$

- $\frac{z_C - z}{z_B - z}$ عدد تخيلي بحت معناه $Arg\left(\frac{z_C - z}{z_B - z}\right) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ أي

$\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}\right) = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ ومنه $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC}$

ومنه (C) هي دائرة قطرها القطعة $[BC]$ ماعدا النقطتين B و C.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

- لدينا : $A(1;2;3), B(2;1;3)$ و $C(2;-2;0)$

1) إثبات أن النقط A, B و C تعين مستويا :

أي نبين أن النقط A, B و C ليست في استقامية .

- لدينا : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ أي $\overrightarrow{AB}(2-1; 1-2; 3-3)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(1;-1;0)$
- ولدينا : $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A)$ أي $\overrightarrow{AC}(2-1; -2-2; 0-3)$ ومنه $\overrightarrow{AC}(1;-4;-3)$

إذن $\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{-4} \neq \frac{0}{-3}$ لا يوجد عدد حقيقي K بحيث يكون $\overrightarrow{AB} = K\overrightarrow{AC}$ أي أن $\overrightarrow{AB} \not\parallel \overrightarrow{AC}$

ومنه A, B و C ليست في استقامية فهي تعين مستويا (ABC)

2) اثبات أن $x + y - z = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

نعوض بإحداثيات النقط A, B و C في المعادلة السابقة نجد : $\begin{cases} 1+2-3=0 \\ 2+1-3=0 \\ 2-2-0=0 \end{cases}$

وبالتالي $x + y - z = 0$ **معادلة ديكارتية للمستوي** (ABC).

3) لدينا : $D(2,0,2), E(-4;6;2)$:

- **كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (DE):**

شعاع توجيه للمستقيم (DE) هو : $\overrightarrow{DE}(x_E - x_D; y_E - y_D; z_E - z_D)$

$\overrightarrow{DE}(-4-2; 6-0; 2-2)$ أي $\overrightarrow{DE}(-6;6;0)$

إذن $\begin{cases} x = -6t + 2 \\ y = 6t \\ z = 2 \end{cases}$ مع $(t \in \mathbb{R})$

4) لدينا : $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y-8z+14=0$

أ) اثبات أن المجموعة (S) سطح كرة :

$x^2-2x+y^2-2y+z^2-8z+14=0$ ومنه

$(x-1)^2-1+(y-1)^2-1+(z-4)^2-16+14=0$

ومنه $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2-4=0$ وبالتالي

$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-4)^2=4$

أي أن (S) سطح كرة مركزها $\Omega(1;1;4)$ ونصف قطرها $R=2$

ب) اثبات أن المستقيم (DE) مماس لسطح الكرة (S):

بتعويض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE) في معادلة (S) نجد :

$(-6t+2-1)^2+(6t-1)^2+(2-4)^2=4$ أي $(-6t+1)^2+(6t-1)^2=0$

وبالتالي $36t^2-12t+1+36t^2-12t+1=0$

ومنه $72t^2-24t+2=0$ أي $36t^2-12t+1=0$

- حل المعادلة $36t^2-12t+1=0$:

حساب المميز : $\Delta=(-12)^2-4(36)(1)=144-144=0$

$\Delta=0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا $t_1=-\dfrac{-12}{2\times 36}=\dfrac{1}{6}$

ومنه المستقيم (DE) مماس لسطح الكرة (S) لا يجاد نقطة التماس نعوض $t=\dfrac{1}{6}$

في جملة التمثيل الوسيطي نجد : $\begin{cases} x=-6\times\dfrac{1}{6}+2=1 \\ y=6\times\dfrac{1}{6}=1 \\ z=2 \end{cases}$ أي (DE) يمس (S) في النقطة $(1;1;2)$

ج) اثبات أن سطح الكرة (S) و المستوي (ABC) يتقاطعان وفق دائرة :

لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|1+1-4|}{\sqrt{(1)^2+(1)^2+(-1)^2}}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

إذن $R=2$ ، $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ومنه $d(\Omega,(ABC))<R$

أي تقاطع (ABC) و (S) هو دائرة نصف قطرها

$r=\sqrt{R^2-(d(\Omega,(ABC)))^2}=\sqrt{4-\dfrac{4}{3}}=\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ أي $r=2\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول :

- لدينا : $g(x) = 2\ln(x) + \dfrac{x-1}{x}$ معرفة على $D_g =]0;+\infty[$

1) دراسة تغيرات الدالة g :

1 - حساب النهايات :

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(2\ln(x) + \frac{x-1}{x}\right) = -\infty$$ لأن $$\begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(2\ln(x)\right) = -\infty \\ \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(\dfrac{x-1}{x}\right) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(2\ln(x) + \frac{x-1}{x}\right) = +\infty$$ لأن $$\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} \left(2\ln(x)\right) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-1}{x}\right) = 1 \end{cases}$$

2 - حساب المشتقة $g'(x)$:

$$g'(x) = 2 \times \frac{1}{x} + \frac{x - x + 1}{x^2} = \frac{2x+1}{x^2}$$

- دراسة إشارة $g'(x)$:

$g'(x) = 0$ معناه $2x+1=0$ ومنه $x = -\dfrac{1}{2}$ و $-\dfrac{1}{2} \notin]0;+\infty[$

- جدول إشارة المشتقة :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖			$+$	
$g'(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

2) حساب $g(1)$:

$$g(1) = 2\ln(1) + \frac{1-1}{1} = 0$$

- جدول إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

؟ الجزء الثاني :

- لدينا : $f(x)=(x-1)^2\ln(x)+x-1$ معرفة على $D_f=]0;+\infty[$

1) حساب نهايتي الدالة f :

- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left((x-1)^2\ln(x)+x-1\right)=-\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(\ln(x))=-\infty\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x-1)^2=1\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x-1)=-1\end{cases}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-1)^2\ln(x)+x-1\right)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x))=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\end{cases}$

2) اثبات أنه من كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$ ، $f'(x)=(x-1)g(x)+1$:

- لدينا :

$$f'(x)=2(x-1)\ln(x)+(x-1)^2\times\frac{1}{x}+1=(x-1)\left[2\ln(x)+\frac{x-1}{x}\right]+1=(x-1)g(x)+1$$

أي $f'(x)=(x-1)g(x)+1$

3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

- جدول اشارة $f'(x)$

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖		$+$		

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

- جدول تغيرات الدالة f :

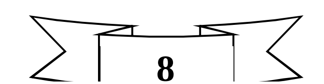
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$+$		
$f'(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

4) اثبات أن المنحني (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي 1:

معناه $f'(x)=1$ ومنه $(x-1)g(x)+1=1$ أي $(x-1)g(x)=0$

- إما : $x-1=0$ ومنه $x=1$ - أو : $g(x)=0$ ومنه $x=1$

إذن المنحني (C_f) يقبل مماسا معامل توجيهه يساوي 1 في النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$



5) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$:

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=1\times(x-1)+0=x-1$ أي $(T):\ y=x-1$

6) دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة الى المماس (T):

- ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$

لدينا : $f(x)-y=(x-1)^2\ln(x)+x-1-(x-1)=(x-1)^2\ln(x)$

$f(x)-y=(x-1)^2\ln(x)$

$f(x)-y=0$ معناه $(x-1)^2\ln(x)=0$

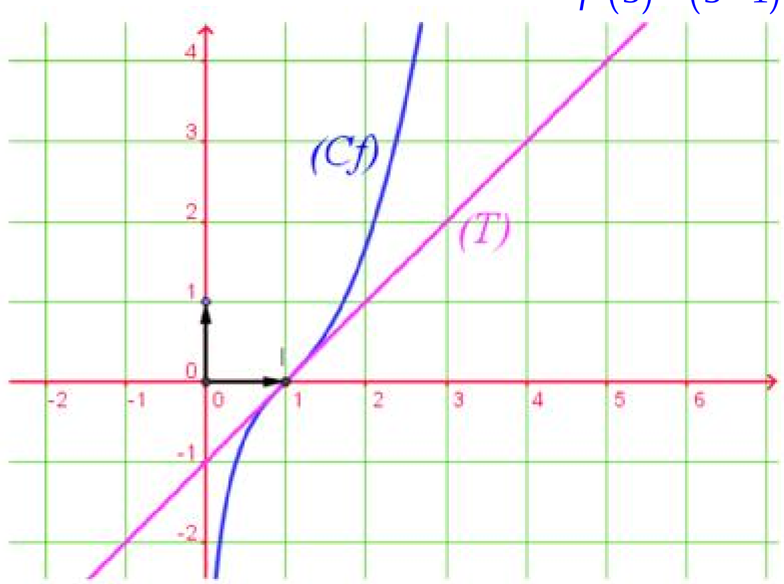
- إما : $(x-1)^2=0$ ومنه $x-1=0$ أي $x=1$
- أو : $\ln(x)=0$ ومنه $x=1$
- جدول إشارة الفرق $f(x)-y$:

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	
$f(x)-y$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (T)	(C_f) يقطع (T)	(C_f) فوق (T)	

- المماس (T) يخترق المنحنى (C_f) في النقطة $I(1;0)$ ومنه (T) مماس انعطاف .
- أي النقطة $I(1;0)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

7) حساب $f(3), f(2)$:

- $f(2)=(2-1)^2\ln(2)+2-1=1+\ln(2)=1.69$
- $f(3)=(3-1)^2\ln(3)+3-1=2+4\ln(3)=6.39$



{ انتهى تصحيح الموضوع الأول J

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (03 نقط)

لدينا $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$

(v_n) و (w_n) متتاليتان عدديتان معرفتان بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$ و $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

1) (v_n) متتالية هندسية (صحيح) لان :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{3}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$$

ومنه $v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = -\frac{2}{3}v_n$ أي $v_{n+1} = -\frac{2}{3}v_n$

وبالتالي (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$

عبارة حدها العام $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$ أي $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

2) (w_n) متتالية ثابتة (صحيح) لأن :

$$w_{n+1} = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = w_n$$

ومنه $w_{n+1} = w_n$ أي (w_n) متتالية ثابتة حيث ، $w_n = w_0 = u_1 + \frac{2}{3}u_0 = 1 + \frac{2}{3} \times 0 = 1$

عبارة الحد العام $w_n = 1$.

3) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$ (صحيح) لان :

$$\frac{3}{5}(w_n - v_n) = \frac{3}{5}\left(u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} + u_n\right) = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}u_n + \frac{3}{3}u_n\right) = u_n$$

أي $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n)$

4) المتتالية (u_n) متباعدة (خاطئ) لان :

عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) : $u_n = \frac{3}{5}(w_n - v_n) = \frac{3}{5}\left(1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$

$u_n = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ وبالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{5}$

لان $\lim_{n\to+\infty}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)=0$ ومنه (u_n) متقاربة تتقارب من $\frac{3}{5}$

التمرين الثاني: (05 نقط)

لدينا : $A(2;1;3)$, $B(-3;-1;7)$ و $C(3;2;4)$

1) اثبات أن النقط A, B و C ليست في استقامية :

أي نبين أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا .(غير متوازيين)

- لدينا : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ أي $\overrightarrow{AB}(-3-2;-1-1;7-3)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-5;-2;4)$
- ولدينا : $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A;y_C-y_A;z_C-z_A)$ أي $\overrightarrow{AC}(3-2;2-1;4-3)$ ومنه $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$

إذن : $\frac{4}{1}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{-5}{1}$ وبالتالي لا يوجد عدد حقيقي K بحيث يكون $\overrightarrow{AB}=K\overrightarrow{AC}$ أي أن $\overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{AC}$

أي النقط A, B و C ليست في استقامية. فهي تعين مستويا (ABC)

2) لدينا : (D) معرف بتمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$

أ) إثبات أن المستقيم (D) يعامد المستوى (ABC):

- أي نبين أن $\vec{u}(2;-3;1)$ شعاع توجيه (D) عمودي على كل من الشعاعين $\overrightarrow{AB}(-5;-2;4)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$

- لدينا : $\vec{u}.\overrightarrow{AB}=2\times(-5)+(-3)\times(-2)+1\times4=-10+6+4=0$ ومنه $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$
- ولدينا : $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=2\times1+(-3)\times1+1\times1=2-3+1+0$ ومنه $\vec{u}\perp\overrightarrow{AC}$

إذن $\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}\perp\overrightarrow{AC}$ ومنه **المستقيم** (D) **يعامد المستوى** (ABC).

ب) تعيين معادلة ديكارتية للمستوى (ABC):

بما أن $\vec{u}\perp(ABC)$ فان $\vec{u}(2;-3;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) وبالتالي معادلة المستوي (ABC) من الشكل : $2x-3y+1\times z+d=0$

- نعوض بإحداثيات النقطة $A(2;1;3)$ **في المعادلة السابقة نجد** : $2(2)-3(1)+1\times(3)+d=0$ ومنه $d=-4$

- **معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) : $2x-3y+z-4=0$**

3) H نقطة تقاطع المستوى (ABC) و المستقيم (D):

أ) إثبات أن النقطة H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$

- **نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم** (D) في معادلة المستوي (ABC) **نجد** :

$2(-7+2t)-3(-3t)+4+t-4=0$ ومنه $-14+4t+9t+t=0$ أي $t=1$

نعوض في الجملة السابقة نجد : $\begin{cases} x_H = -7+2(1) = -5 \\ y_H = -3(1) = -3 \\ z_H = 4+1 = 5 \end{cases}$ إذن $H(-5;-3;5)$

- نفرض أن النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$

لدينا : $-2+(-1)+2=-1$ و $-1 \neq 0$ ومنه G موجودة . إذن

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{-2\times 2-(-3)+2(3)}{-1} = -(-4+3+6) = -5 \\ y_G = -3(1) = \dfrac{-2\times 1-(-1)+2\times 2}{-1} = -(-2+1+4) = -3 \\ z_G = \dfrac{-2\times 3-7+2\times 4}{-1} = -(-6-7+8) = 5 \end{cases}$$

أي $G(-3;-3;5)$ ومنه $H=G$

وبالتالي النقطة H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$

ب) تعيين طبيعة (P) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CB}=0$:

- لدينا : $-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=(-2-1+2)\overrightarrow{MH}$ أي

$-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}=\overrightarrow{HM}$ لأن H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,-2),(B,-1),(C,2)\}$

إذن $\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{CB}=0$ **معناه** $\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{BC}=0$

أي (P) هو مستو $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له و يشمل النقطة $H(-5;-3;5)$

4) دراسة تقاطع المستوي (ABC) و المجموعة (P):

- **تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (P):**

– لدينا : $\overrightarrow{BC}(6;3;-3)$ و $\overrightarrow{HM}(x+5;y+3;z-5)$

$\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{BC}=0$ معناه $6(x+5)+3(y+3)-3(z-5)=0$

ومنه $6x+3y-3z+54=0$ أي $(P): 2x+y-z+18=0$

- دراسة تقاطع (ABC) و (P):

$\overrightarrow{n_{(ABC)}}(2;-3,1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) و $\overrightarrow{n_{(P)}}(2;1,-1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

– لدينا : $\dfrac{2}{2} \neq \dfrac{-3}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$ ومنه $\overrightarrow{n_{(ABC)}} \nparallel \overrightarrow{n_{(P)}}$ **وبالتالي** (ABC) و (P) غير متوازيين أي متقاطعين .

– **تعيين تمثيل وسيطي لمستقيم التقاطع :** لدينا : $\begin{cases} 2x-3y+z-4=0 \\ 2x+y-z+18=0 \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} 2x-3y+z-4=0 \\ -4y+2z-22=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} 2x-3y+z-4=0 \\ 2z=4y+22 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} 2x-3y+z-4=0 \\ z=2y+11 \end{cases}$

– نضع $y=t$ وبالتالي $\begin{cases} 2x-3t+2t+11-4=0 \\ y=t \\ z=2t+11 \end{cases}$

أي $(t\in\mathbb{R})$ $\begin{cases} x=\frac{1}{2}t-\frac{7}{2} \\ y=t \\ z=2t+11 \end{cases}$ و هو تمثيل وسيطي لمستقيم تقاطع المستويين (ABC) و (P)

التمرين الثالث : (05 نقط)

1) حل المعادلة : $4z^2-2z+1=0$:

- حساب المميز Δ : $\Delta=(-2)^2-4\times4\times1=4-16=-12=12i^2$

نضع : $\Delta=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$

الجذران التربيعيان للعدد Δ هما : $\delta_1=2i\sqrt{3}$, $\delta_2=-2i\sqrt{3}$

- حلي المعادلة هما : $z_1=\frac{2+2i\sqrt{3}}{8}=\frac{1+i\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$

$z_2=\frac{2-2i\sqrt{3}}{8}=\frac{1-i\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$

- مجموعة حلول المعادلة : $S=\left\{\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$

2) لدينا : $Z=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ ومنه $\overline{Z}=\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}$

أ) كتابة العددين Z و $\overline{Z}$ على الشكل المثلثي :

- لدينا : $|Z|=\left|\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{16}}=\frac{1}{2}$

- نضع $Arg(Z)=\theta$ إذن $\begin{cases} \cos\theta=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \\ \sin\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

- **الشكل المثلثي للعدد Z هو** $Z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

• الشكل المثلثي لمرافق العدد Z : $\overline{Z}=\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

ب) لدينا : $L_k=\left(\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k-\left(\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^k$ أي $L_k=Z^k-\overline{Z}^k$

▪ اثبات أن $L_k=\frac{1}{2^{k-1}}i\sin\frac{k\pi}{3}$

لدينا : $L_k=Z^k-\overline{Z}^k$ ومنه

$$L_k=\left[\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^k-\left[\frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^k$$

ومنه $L_k=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)-\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\cos\left(-\frac{k\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{k\pi}{3}\right)\right)\right]$

وبالتالي :

$$L_k=\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\frac{k\pi}{3}+i\left(\frac{1}{2}\right)^k\sin\frac{k\pi}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^k\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)+i\left(\frac{1}{2}\right)^k\sin\left(-\frac{k\pi}{3}\right)$$

لان :

$$\begin{cases}\cos\left(-\frac{k\pi}{3}\right)=\cos\frac{k\pi}{3}\\ \sin\left(-\frac{k\pi}{3}\right)=-\sin\frac{k\pi}{3}\end{cases}$$

إذن: $L_k=2\times\frac{1}{2^k}i\sin\frac{k\pi}{3}=\frac{1}{2^{k-1}}i\sin\frac{k\pi}{3}$

لان $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^k=2\times\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}$ وبالتالي $L_k=\frac{1}{2^{k-1}}i\sin\frac{k\pi}{3}$

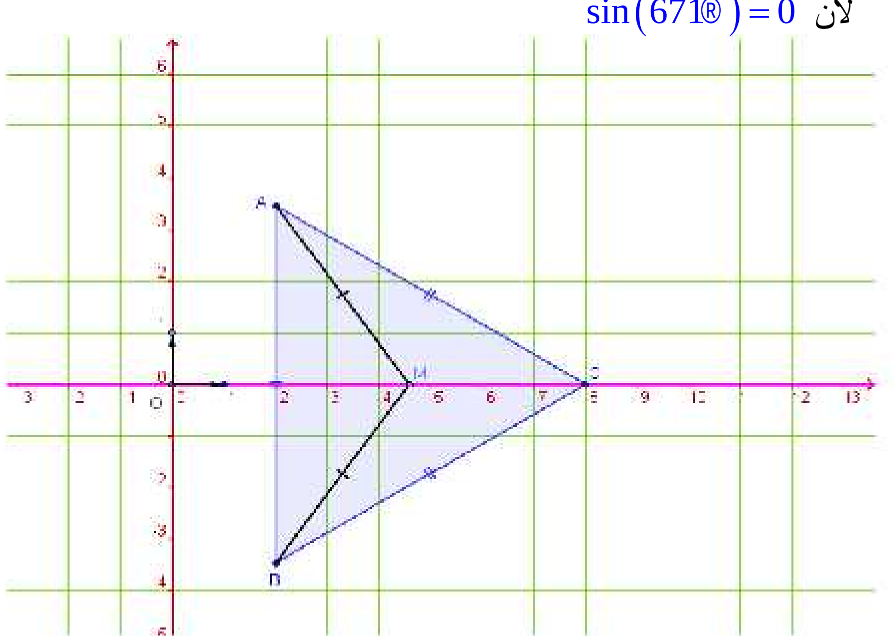
▪ تعيين قيمة L_{2013} : $L_{2013}=\frac{1}{2^{2013-1}}i\sin\left(\frac{2013k}{3}\right)=\frac{1}{2^{2012}}i\sin(671\pi)=0$

$L_{2013}=0$ لان $\sin(671\pi)=0$

3) لدينا : $z_A=2+2i\sqrt{3}$

و $z_B=2-2i\sqrt{3}$

أ) تعليم النقطتين B, A :



ب) تعيين z_C **لاحقة النقطة** C **صورة النقطة** B **بالدوران** R **الذي مركزه النقطة** A **و زاويته** $\frac{\pi}{3}$:

العبارة المركبة للدوران R من الشكل : $z' = az + b$

حيث : $a = \cos_ + i\sin_ = \cos\frac{®}{3} + i\sin\frac{®}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و

$$b = (1-a)z_A = \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2+2i\sqrt{3}\right) = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2+2i\sqrt{3}\right) = 1 + i\sqrt{3} - i\sqrt{3} + 3 = 4$$

أي $b = 4$

ومنه : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 4$

$R(B) = C$ معناه $z_C = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B + 4 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(2 - 2i\sqrt{3}\right) + 4 = 4 + 4 = 8$

أي $z_C = 8$

ج) تعيين طبيعة المثلث ABC:

– لدينا : $R(B) = C$ معناه $AB = AC$ و $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{®}{3} + 2k®\ (k \in \mathbb{Z})$

وبالتالي ABC مثلث متقايس الأضلاع .

د) تعيين مجموعة النقط (Γ) :

– لدينا : $\left|z - 2 - 2i\sqrt{3}\right| = \left|z - 2 + 2i\sqrt{3}\right|$ معناه $|z - z_A| = |z - z_B|$

أي $AM = BM$

إذن (Γ) محور القطعة $[AB]$

التمرين الرابع : (07 نقط)

I. لدينا : $g(x) = xe^x - e^x + 1$ معرفة على $D_g = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

1) دراسة تغيرات الدالة g:

- **حساب النهايات :**

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(xe^x - e^x + 1\right) = 1$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty}\left(xe^x\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(xe^x - e^x + 1\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x(x-1) + 1 = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty}(x-1) = +\infty \end{cases}$

حساب المشتقة : $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$ أي $g'(x) = xe^x$

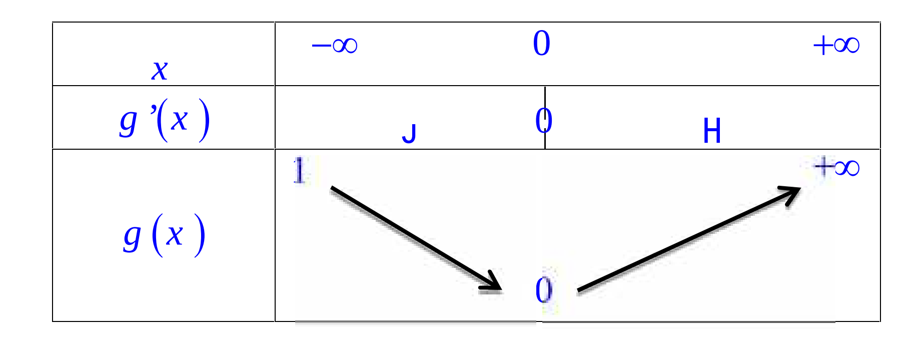
- دراسة اشارة المشتقة :

$g'(x)=0$ معناه $xe^{x}=0$ ومنه $x=0$ لان $e^{x}\neq 0$

- جدول اشارة المشتقة :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	J	0	H

- جدول تغيرات الدالة g:



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	J	0	H
$g(x)$	1 ↘	0	↗ $+\infty$

2) حساب $g(0)$:

$$g(0)=0\times e^{0}-e^{0}+1=-1+1=0$$

استنتاج اشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	H	0	H

II. لدينا : $f(x)=(x-2)e^{x}+x-2$ معرفة على $D_f=\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$

1) **حساب النهايات :**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-2)e^{x}+x-2\right]=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{x}-2e^{x}+x-2\right)=-\infty$$

لان
$$\begin{cases}\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)=0\\ \lim_{x\to-\infty}2e^{x}=0\\ \lim_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(x-2)e^{x}+x-2\right]=+\infty$$

لان
$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}(x-2)e^{x}=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty\\ \lim_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty\end{cases}$$

2) **التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي** x ، $f'(x)=g(x)$:

لدينا : $f'(x)=e^{x}+(x-2)e^{x}+x=e^{x}+xe^{x}-2e^{x}+1=xe^{x}-e^{x}+1=g(x)$

إذن : $f'(x)=g(x)$.

3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

اشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$

جدول اشارة $f'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		H	0	H	

جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		H	0	H	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-4	↗	$+\infty$

4) أ)– اثبات أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$:

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x-2)) = \lim_{x\to-\infty}\left[(x-2)e^x + x - 2 - x + 2\right] = \lim_{x\to-\infty}(x-2)e^x = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^x - 2e^x\right) = 0$$

أي $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x-2)) = 0$ ومنه (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة الى (Δ):

ندرس اشارة الفرق $f(x) - y = (x-2)e^x$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-y$		J	0	H	
الوضعية النسبية		(Δ) فوق (C_f)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	

ج) اثبات أن النقطة $I(0;-4)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f):

لدينا : $f'(x) = g(x)$ ومنه $f''(x) = g'(x) = xe^x$

وبالتالي اشارة المشتقة الثانية للدالة f من اشارة $g'(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		J	0	H	

إذن المشتقة الثانية تنعدم من أجل $x = 0$ مغيرة اشارتها . ومنه النقطة $I(0;f(0))$

أي $I(0;-4)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f).

د) تبيان أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1 :

⬅ معامل توجيه المماس (T) يساوي 1 معناه $f'(x)=1$ ومنه $g(x)=1$

إذن : $xe^x - e^x + 1 = 1$ و بالتالي $(x-1)e^x = 0$ ومنه $x-1=0$ (لان $e^x \neq 0$)

أي $x=1$

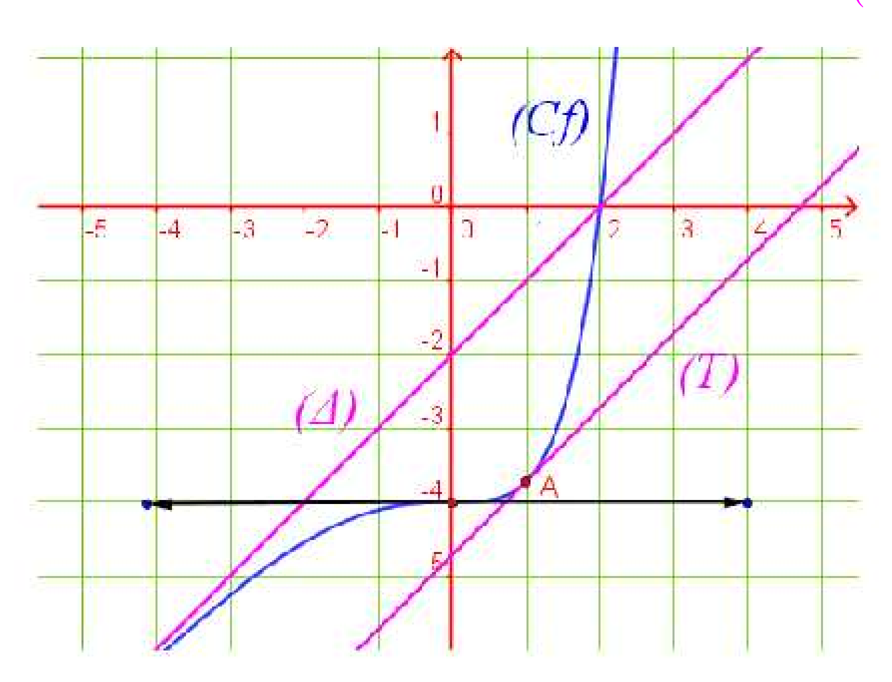
– **المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1 في النقطة ذات الفاصلة** $x_0 = 1$

– **كتابة معادلة ديكارتية للمماس** (T):

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1\times(x-1) + (-e-1) = x - e - 2$$

– أي $(T): \ y = x - e - 2$

5) الرسم :



6) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة (E) حلين مختلفين في الاشارة :

⬅ **لدينا :** $(x-2)e^x - 2 + m = 0$ معناه $(x-2)e^x - 2 = -m$ أي

$(x-2)e^x + x - 2 = x - m$ وبالتالي $f(x) = x - m$

✍ بيانيا حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع مستقيم (D) ذي المعادلة : $y = x - m$ الموازي لكل من (Δ) المستقيم المقارب المائل و المماس (T).

⬅ (D) يقطع (C_f) في نقطتين فاصلتيهما مختلفتين في الاشارة في حالة : $-4 < -m < -2$

أي $2 < m < 4$ و بالتالي $m \in]2;4[$

✍ انتهى تصحيح الموضوع الثاني ☺

❀مع تمنياتنا لكم بالتوفيق و النجاح في البكالوريا ❀

أساتذة المادة

اختبار بكالوريا التجريبي **السنة الدراسية : 1435/1434 هـ// 2014/2013 م**

الشعبة: علوم تجريبية. الاثنين 12 رجب 1435 هـ /12 ماي 2014م

اختبار في مادة : الرياضيات المدة : ثلاث ساعات ونصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول(05 نقاط) :

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$.
2. نضع : $a=2i$ ، $b=-\sqrt{3}+i$ و $c=-\sqrt{3}-i$.
   - اكتب الأعداد a ، b و c على الشكل الأسي.
   - بين أن العدد b^{1434} حقيقي سالب .

نعتبر في المستوي المركّب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب الأعداد المركبة a ، b و c .

3. احسب قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .
4. أثبت أن الرباعي $OABC$ معين يطلب حساب مساحته.
5. حدد زاوية الدوران R الذي مركزه B ويحول النقطة O إلى النقطة A ، ثم اكتب صيغته المركبة.
6. اكتب الصيغة المركبة للتحاكي H الذي مركزه B ونسبته -3.
7. اكتب الصيغة المركبة للتحويل $S=RoH$ ثم حدد طبيعته وعناصره المميزة.

التمرين الثاني(05 نقاط):

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=-1$ وَ $u_1=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{1}{4}u_n$$

1. احسب u_2 ثم استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)$ لا حسابية ولا هندسية.
2. نعرف المتتالية $\left(v_n\right)$ من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n$

   أ / احسب v_0 ثم عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n.

   ب / استنتج أن المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية يطلب تعيين أساسها. ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n .
3. نعرف المتتالية $\left(w_n\right)$ كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=\frac{u_n}{v_n}$.

   أ / احسب w_0 ثم باستعمال المساواة $u_{n+1}=v_n+\frac{1}{2}u_n$، عبر عن w_{n+1} بدلالة v_n وَ u_n.

   ب / استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $w_{n+1}=w_n+2$ ، ثم عبر عن w_n بدلالة n.
4. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$.
5. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

   برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n فإن: $S_n=2-\frac{2n+3}{2^n}$

التمرين الثالث(04 نقاط):

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(0;1;1)$ ، $B(1;4;0)$ و $C(1;0;1)$ و $D(1;3;3)$.

1. بين أن النقط A ، B و C تعيّن مستويا.
2. جد العددين a و b حتى يكون $\vec{n}(1;a;b)$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC).
   استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).
3. نعتبر المستقيم (Δ) المعرّف بالتمثيل الوسيطي التالي: $\begin{cases} x = t+1 \\ y = t-1 \\ z = 4t-5 \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$

- تحقق من أن النقطة D والمستقيم (Δ) تعين مستويا (P) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.
- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (P).
- بين أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان.

4. لتكن S مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء والتي تحقق:

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-6z+\frac{13}{2}=0$$

- بين أن S سطح كرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها r.

التمرين الرابع (06 نقاط) :

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (نأخذ $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$).

لتكن الدالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-3-\ln x+\frac{1}{x}$.

ولتكن الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=e^{-x}(3+\ln x)$

نسمي (C) المنحني البياني الممثل للدالة f .

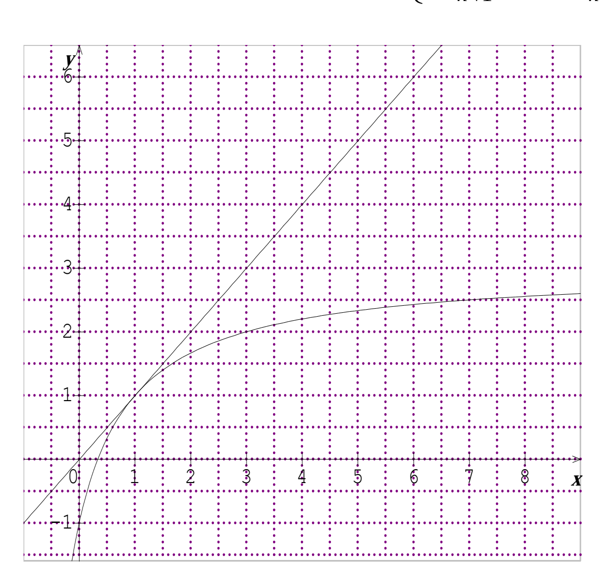
1. أ / ادرس تغيرات الدالة g.
   ب / بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث: $0,45<\alpha<0,46$.
   ج / استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.
2. احسب: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (لاحظ أنّ $f(x)=3e^{-x}+\frac{x}{e^x}\times\frac{\ln x}{x}$). فسّر النتيجتين بيانيا.
3. بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x: $f'(x)=e^{-x}g(x)$ ، استنتج عندئذ إشارة $f'(x)$.
   شكل جدول تغيرات الدالة f .
   لحساب $f(\alpha)$ نأخذ: $\alpha\approx 0,45$
   انشئ المنحنى (C).

الموضوع الثاني

التمرين الأول(03 نقاط) :

نعتبر الدالة f المعرّفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=3-\dfrac{4}{x+1}$

نعتبر المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$



1. المنحنى $\mathscr{C}$ الممثل للدالة f والمستقيم $\mathscr{D}$ ذو المعادلة $y=x$ معطى كما يلي:
أ / مثل باستعمال ورق الرسم على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مظهرا خطوط الرسم.
ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
2. أ / برهن باستعمال الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n \geq 1$
ب / ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) مستنتجا تقاربها
ج / تأكد من صحة التخمين السابق ثم احسب نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الثاني (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

المستقيم (d) المعرّف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases} x = 2-\dfrac{1}{2}k \\ y = 2 \qquad / k \in \mathbb{R} \\ z = 5-\dfrac{3}{2}k \end{cases}$

النقط $A(2;-1;1)$ ، $B(4;-2;2)$ و النقطة C من المستقيم (d) ذات الفاصلة 1 .

أجب بصحيح أو خاطئ مع التعليل:

1. المستقيم (d) يوازي المحور $\left(O;\vec{j}\right)$.
2. المستوي (P) الذي معادلته $x+3z-5=0$ يمرّ من النقطة A وعمودي على (d).
3. قيس الزاوية الهندسية BAC هو $\dfrac{\pi}{3}rad$.
4. المستقيم (d) يقطع سطح الكرة (S) التي مركزها C ونصف قطرها 10 في نقطتين متمايزتين.

التمرين الثالث (05 نقاط) :

المستوي المركّب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ (الوحدة : 2cm)

نرمز بـ J للنقطة ذات اللاحقة i .

1. نعتبر النقط A ، B ، C و H لواحقها على الترتيب: $a=-3-i$ ، $b=-2+4i$ ، $c=3-i$ و $h=-2$
علم هذه النقط على الرسم.
2. بين أن النقطة J مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC.
3. اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\dfrac{b-c}{h-a}$ ثم استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.

في بقية الرسم نقبل أن النقطة H هي نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث ABC.

4. نرمز بـ G إلى مركز ثقل المثلث ABC ، عين g لاحقة النقطة G ثم علم النقطة G على الرسم.
5. بيّن أن النقط J ، H و G في استقامية وتحقق من ذلك على الرسم.
6. نرمز بـ A' إلى منتصف القطعة $[BC]$ وبـ K إلى منتصف القطعة $[AH]$ النقطة A' لاحقتها: $a'=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

أ / عين k' لاحقة النقطة K.

ب/ بيّن أن الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع.

التمرين الرابع (08 نقاط):

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x)=\frac{3e^x-1}{e^x+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f(-x)+f(x)=2$ ، فسّر هذه النتيجة بيانيا.
2. احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمن مقاربين يطلب تعيين معادلتيهما.
3. احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
4. جد معادلة ديكارتية للمماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 .
5. لتكن الدالة العددية u للمتغير الحقيقي x المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $u(x)=f(x)-(x+1)$

أ / بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $u'(x)=-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$.

ب / استنتج تغيرات الدالة u ثم حدد إشارتها. (احسب $u(0)$)

ج / استنتج مما سبق الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ).

6. انشئ (C_f) ومقاربيه والمستقيم (Δ).
7. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(3-m)e^x-m-1=0$.
8. جد العددين الحقيقين a و b بحيث من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x)=a+\frac{be^x}{e^x+1}$

ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

9. نعتبر الدالتين العدديتين φ و ψ المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\varphi(x)=\left|\frac{3e^x-1}{e^x+1}\right| \quad \text{و} \quad \psi(x)=\frac{3e^{|x|}-1}{e^{|x|}+1}$$

انشئ التمثيلين البيانيين للدالتين φ و ψ في نفس المعلم السابق(دون دراسة φ و ψ - استعمل الألوان -)

التصحيح النموذجي

الموضوع الأول	20
التمرين الأول:	**05**

الإجابة	العلامة	الإجابة	العلامة
.1 $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$ $\Delta=-4=4i^2$ $z_2=-\sqrt{3}-i \quad ; \quad z_1=-\sqrt{3}+i$	01	5. زاوية الدوران الذي يحول Oإلىَ A ومركزه B: $(\overrightarrow{BO};\overrightarrow{BA})=\arg\left(\frac{a-b}{-b}\right)=\arg\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}+i}\right)=\frac{7\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$	0,25
.2 $a=2e^{i\frac{\pi}{2}};b=2e^{i\frac{5\pi}{6}};c=2e^{i\frac{7\pi}{6}}=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$	0,75	الصيغة المركّبة لهذا الدوران R: $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+2i$	0,25
$b^{1434}=\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{1434}=2^{1434}\times e^{i1195\pi}=-2^{1434}$	0,5	6. الصيغة المركّبة للتحاكي H الذي مركزه B ونسبته -3 هي: $z'=-3z-4\sqrt{3}+4i$	0,25
.3 $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\arg\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$	0,25		
بما أن : $\|a\|=\|b\|=2$ المثلث OAB متقايس الأضلاع	0,25	7. الصيغة المركبة للتحويل $S=RoH$ $z'=\left(-\frac{3}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}\right)z-4\sqrt{3}-2i$	0,25
4. الرباعي $OABC$ معين يكافئ: قطراه متناصفان متعامدان: أي: $\frac{a-c}{b}=iy \;/\; \|y\|\neq 1$ $\frac{a-c}{b}=-i\sqrt{3}$	0,5	$z_0=\frac{-4\sqrt{3}-2i}{1-\left(-\frac{3}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{-4\sqrt{3}-2i}{\frac{5}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}}=\frac{-8\sqrt{3-4i}}{5+3i\sqrt{3}}=z_B$ التحويل تشابه مباشر زاويته $\frac{4\pi}{3}$ نسبته 3 ومركزه B	0,5
حجمه: $S_{OABC}=OB\times AC=2\|c-a\|=4\sqrt{3}\ U.S$	0,25		

التمرين الثاني:	**05**

الإجابة	العلامة	الإجابة	العلامة
1 / $u_2=\frac{3}{4}$	0,25	ب / (v_n)متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$	0,25
$u_2-u_1\neq u_1-u_0$ $\frac{1}{4}\neq\frac{3}{2}$ (u_n) لا حسابية	0,25	$v_n=\frac{1}{2^n}$	0,5
		$w_0=-1$	0,25
$\frac{u_2}{u_1}\neq\frac{u_1}{u_0}$ $\frac{3}{2}\neq-\frac{1}{2}$ (u_n) لا هندسية	0,25	3 / أ / $w_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}=\frac{v_n+\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n}$	0,25
$v_0=1$	0,25	(w_n)متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول $w_{n+1}=w_n+2$ وَ $w_0=-1$	0,25
أ / $v_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n\right)$ $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$	0,75	$w_n=-1+2n$	0,5
		4 / $u_n=w_n\times v_n=\frac{2n-1}{2^n}$	0,5

العناصر	العلامة	العناصر	العلامة
5 / الاستدلال بالتراجع: نسمي الخاصية $P(n)$ حيث: $P(n): S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$: $p(0): S_0 = u_0 0_n = 2 - \frac{2(0)+3}{2^0} = -1$ الخاصية محققة من أجل $n=0$. نفرض أن الخاصية محققة من الرتبة n ولنثبت صحتها من أجل $n+1$:		$P(n+1): S_{n+1} = 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$ $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2n+1}{2^{n+1}}$ $= 2 - \frac{2n+5}{2^{n+1}}$ الخاصية محققة من أجل الرتبة $n+1$ ومنه: من أجل كل عدد طبيعي n: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$	0,75
التمرين الثالث:			**04**
1 / $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad x_{\overrightarrow{AC}} = x_{\overrightarrow{AB}}$, $y_{\overrightarrow{AC}} = y_{\overrightarrow{AB}}$ النقط A، B و C ليست في استقامية فهي تعين مستويا	0,5	التمثيل الوسيطي للمستوي (P) : $\overrightarrow{DM} = \alpha\vec{u} + \beta\overrightarrow{DH}$; $H \in (\Delta) / H(1;-1;-5)$ $\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha - 4\beta + 3 \ / \ \alpha \in \mathbb{R}; \beta \in \mathbb{R} \\ z = 4\alpha - 8\beta + 3 \end{cases}$	0,5
2 / $\vec{n}(1;1;4)$	0,5	$(P): -2x - 2y + z + 5 = 0$	0,5
$(ABC): x + y - 4z = 0$	0,5	$\vec{n}_{(ABC)} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0$ المستويان متعامدان	0,5
3 / $D \notin (\Delta)$ فإن D و (Δ) تعين مستويا	0,5	$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = \frac{9}{2}$ المجموعة سطح كرة مركزها $\omega(1;1;3)$ ونصف قطرها $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$	0,5
التمرين الرابع:			**06**
$g(x) = -3 - \ln x + \frac{1}{x}$ 1/ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} g(x) = +\infty$	0,5	x: 0 … $+\infty$; $g'(x)$: $-$; $g(x)$: $+\infty \searrow -\infty$	0,5
g دالة تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x) = -\frac{x+1}{x^2} < 0$ الدالة g متناقصة على $]0;+\infty[$	0,5+0,25	ب / مبرهنة القيم المتوسطة	0,5
		x: $-\infty$ … a … $+\infty$; $g(x)$: $+$ 0 $-$	0,5
		$f'(x) = e^{-x} g(x)$	0,5
2 / $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = -\infty$	0,5	x: $-\infty$ … a … $+\infty$; $f'(x)$: $+$ 0 $-$	0,5
محور الفواصل مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$ محور التراتيب مقارب لـ (C)	0,25	x: 0 … a … $+\infty$; $f'(x)$: $+$ 0 $-$; $f(x)$: $-\infty \nearrow f(a) \searrow 0$	0,5

0,75	(منحنى)	0,5	خاص بالتمرين الأول من الموضوع الثاني (منحنى)

الموضوع الثاني	20

التمرين الأول: 05

الإجابة	العلامة
1 / ب / المتتالية (u_n) متناقصة ومتقاربة	0,5
2 / أ / الاستدلال بالتراجع: $P(n): u_n \geq 1$ التحقق من الخاصية من أجل $n=0$ / $u_0 = 4 > 1$ نفرض أن الخاصية محققة من أجل الرتبة n ولنثبت صحتها من أجل الرتبة $n+1$: لدينا: $u_n \geq 1$ $u_n + 1 \geq 2$ $-\frac{4}{u_n+1} \geq -2$ $3 - \frac{4}{u_n+1} \geq 1$ $u_{n+1} \geq 1$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n \geq 1$	0,75
ب / دراسة اتجاه التغير: $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 1}$ $= -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1} \leq 0$ من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (u_n) متناقصة	0,5
بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة	0,25
ج / التخمين صحيح حساب النهاية: $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l = 1$	0,5

التمرين الثاني 04

الإجابة	العلامة
1 / خاطئ شعاع توجيه محور التراتيب $\vec{u}(0;1;0)$ وشعاع توجيه المستقيم (d) غير مرتبطين خطيا.	0,5 0,5
2 / صحيح لأن: $A \in (P)$ شعاع توجيه (d) مرتبط خطيا مع الشعاع الناظمي للمستوي (P)	0,5 0,5
3 / خاطئ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -4$ $\cos(BAC) = \frac{-4}{\sqrt{6}\times\sqrt{11}} \neq \frac{1}{2}$	0,5 0,5
4 / صحيح النقطة C تنتمي إلى المستقيم (d) وهي مركز سطح الكرة (S) في نقطتين متقابلتين قطريا	0,5 0,5

التمرين الثالث 05

الإجابة	العلامة
$g = \frac{a+b+c}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$	0,5
2 / J مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC $JA = JB = JB = \|j - a\| = \sqrt{13}$	0,5
تمثيل النقط مع التحقق من الاستقامية برسم خط	1,75
للإثبات أن النقط J ، H و I في استقامية نثبت أن الشعاعين $\overrightarrow{HG}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطان خطيا: $\frac{h-g}{h-j} = \frac{2}{3}$	0,5
3 / $\frac{b-a}{h-a} = 5i$ المستقيمان (AH) و (BC) متعامدان	0,75
$k' = \frac{a+h}{2} = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}i$	0,5
$KHA'J$ متوازي أضلاع معناه: $k' + a' = h + j = -2 + i$	0,5

<table>
<tr><td>08</td><td colspan="3">التمرين الرابع:</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>4 / معادلة المماس (Δ) عند النقطة التي فاصلتها0: $y=x+1$</td><td>0,25</td><td>$f(-x)+f(x)=2$</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>5 / أ / $u'(x)=-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$</td><td>0,25</td><td><u>التفسير البياني</u>: النقطة التي احداثياها $(0;1)$ مركز تناظر لـ (C_f)</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>ب / الدالة u متناقصة تماما على $\mathbb{R}$</td><td>0,5</td><td>2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ 0 $+\infty$</td></tr><tr><td>$u(x)$</td><td>$+$ 0 $-$</td></tr></table></td><td>0,5</td><td>المستقيم الذي معادلته $y=-1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $-\infty$
المستقيم الذي معادلته $y=3$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$</td></tr>
<tr><td>0,25</td><td>الوضع النسبي: المنحني (C_f)فوق المماس (Δ)من أجل كل $x\in]-\infty;0]$
(C_f) يقطع (Δ)عند النقطة ذات الفاصلة 0
(C_f)تحت المماس (Δ)من أجل كل $x\in]0;+\infty[$</td><td>0,5</td><td>3/ $f'(x)=\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$</td></tr>
<tr><td>0,75</td><td>7 / <u>المناقشة البيانية</u>: $f(x)=m$ ، حلول المعادلة السابقة هي فواصل نقط تقاطع (C_f)مع المستقيم ذي المعادلة $y=m$
$m\in]-\infty;-1]\cup[3;+\infty[$ليس للمعادلة حل.
$m\in]-1;1[$للمعادلة حل سالب
$m=1$ للمعادلة حل معدوم.
$m\in]1;3[$ للمعادلة حل موجب.</td><td>0,75</td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>-1 ↗ 3</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>f دالة مستمرة على $\mathbb{R}$وتقبل دوال أصلية F على $\mathbb{R}$:
$F(x)=-x+4\ln(e^x+1)+c\,/\,c\in\mathbb{R}$</td><td>0,25</td><td>8/ $a=-1$ ، $b=4$ ، $f(x)=-1+\frac{4e^x}{e^x+1}$</td></tr>
<tr><td>1,75</td><td colspan="3"></td></tr>
</table>

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول(05 نقاط) :

نعتبر في مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z التالية: $z^2-2z+10=0.........(E)$

1 / حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2 / في المستوي المركّب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2+i$ ، $z_B=1+3i$ ، $z_C=-3+i$ و $z_D=1-3i$.

أ)احسب العدد المركّب $\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}$ واكتبه على الشكل الأسي واستنتج أن المثلّث ABC قائم في B.

ب) اكتب العبارة المركّبة للتشابه S الذي مركزه B ويحوّل A إلى C.

ج) عين z_E لاحقة النقطة E بحيث تكون النقطة D صورة E بالتشابه S.

د) عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث: $z=z_E+2e^{i\theta}$ / $\theta\in\mathbb{R}$.

3 / أ / عين z_F لاحقة النقطة F والتي تحقّق: $\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DB}$

ب / استنتج نسبة التحاكي h الذي مركزه B ويحول D إلى F .

ج / عين عناصر التحويل S' بحيث: $S'=hoS$.

د / استنتج الخصائص الديكارتية للمجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S'.

التمرين الثاني(04 نقاط):

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0=1$ وَ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_{n+1}=\frac{3u_n}{u_n+1}$

f دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{3x}{x+1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ **الوثيقة المرفقة**.

1. أ / مثل على **الوثيقة المرفقة** وعلى محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مظهرا خطوط الرسم.
   ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
2. أ / برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n أنّ: $0<u_n<2$.
   ب/ أثبت أنّ المتتالية (u_n)متزايدة تماما،
   ج / استنتج أنّها متقاربة محددا نهايتها.
3. نعتبر المتتالية (v_n)المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=1-\frac{2}{u_n}$.
   - بيّن أنّ (v_n) هندسية ، عيّن أساسها وحدّها الأول.
   - اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
   - تحقّق من نهاية u_n المحسوبة في السؤال 2. ب .

التمرين الثالث(04 نقاط):

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقط $A(1;0;0)$ ، $B(0;2;0)$ و $C(0;0;3)$ ثلاث نقط في الفضاء ،.

1. تحقق من أنّ $6x+3y+2z-6=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).
2. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من النقطة O العمودي على (ABC).
3. احسب إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستوي (ABC) والمستقيم (D).
4. بين أن المثلّث OAC قائم في O.
5. تحقّق أنّ الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عمودي على كل من الشعاعين : $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$.
6. أ / بيّن أن حجم رباعي الوجوه $OABC$ هو $1u.v$

   ب / استنتج مساحة المثلث ABC

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I) لتكن الدالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^2+3x-4+4\ln x$.

1) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g.
2) شكّل جدول تغيرات الدالة g .
3) احسب $g(1)$ ثم استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+3\ln x-\dfrac{4\ln x}{x}$

نسمي (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. (نأخذ $\|\vec{i}\|=3cm$).

1) أحسب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$.
2) أ / أبيّن أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

   ب / استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ، وشكّل جدول تغيّراتها.
3) ليكن المستقيم (D) المستقيم الذي معادلته $y=x$ أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C) بالنسبة للمستقيم (D).
4) أرسم (D) و (C).

III) لتكن الدالة F المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2-3x(1-\ln x)-2(\ln x)^2$

1) أثبت أنّ F دالة اصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.
2) احسب بالسنتيمتر المربّع ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

الموضوع الثاني

التمرين الأول(05 نقاط) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ المستوي (P) الذي معادلته: $-4x-3y+1=0$ والأشعّة $\vec{u}\left(6;-8;\frac{9}{2}\right)$ ، $\vec{v}\,(4;1;3)$ و $\vec{n}\,(3;0;-4)$

المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي معرّف بـ $\begin{cases} x=t \\ y=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}t \\ z=\frac{3}{4}t-\frac{3}{4} \end{cases} ;t\in\mathbb{R}$

1. تحقّق أنّ المستقيم (D) محتوى في المستوي (P).
2. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A\,(1;1;0)$ وَ $\vec{v}$ شعاع توجيه له
3. أ / بين أنّ الشعاع $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (D).
   ب / احسب $\vec{u}.\vec{n}$ وَ $\vec{v}.\vec{n}$ ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيمين (D) و (Δ).
4. أ / احسب المسافة بين النقطة $M\,(x;y;z)$ وكل من (P) و(Q).
   ب/ أثبت أنّ مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي اتحاد مستويين (P_1) و (P_2) يطلب تعيين معادلة ديكارتية لكل منهما. ثمّ بين أنّ (P_1) و (P_2) متعامدان.
5. عين مجموعة النقط M من الفضاء التي احداثياتها حلول الجملة الآتية: $\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 3x-4z-3=0 \\ x+3y+4z+2=0 \end{cases}$

التمرين الثاني (04 نقاط)

من أجل كل سؤال ، توجد إجابة واحدة صحيحة من الإجابات الثلاث المقترحة. حدد هذه الإجابة مع التبرير.

1. نضع $z_A=3+i\sqrt{3}$ ، $z_B=\overline{z}_A$ و $z_C=-\sqrt{3}+3i$

   $\arg\left(\frac{z_C}{z_A}\right)=\theta$ حيث θ هي:

أ /	$\theta=\frac{\pi}{2}$	ب /	$\theta=\frac{7\pi}{6}$	ج /	$\theta=\frac{2\pi}{3}$

2. نضع : $A=\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{2016}+\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{2016}$

أ /	$A=2$	ب /	$A=0$	ج /	$A=2i$

3. التشابه S الذي مركزه $E\,(3-\sqrt{3};0)$ ويحوّل A إلى C ، زاويته θ ونسبته k

أ /	$\theta=\frac{\pi}{2};k=\sqrt{3}$	ب /	$\theta=-\frac{\pi}{2};k=\frac{\sqrt{3}}{3}$	ج /	$\theta=\frac{\pi}{3};k=3$

4. نعتبر في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركّبة المعادلة: $z^2+\alpha z+12=0$ ، حيث α عدد حقيقي.
   قيم α حتى تقبل المعادلة حلين مترافقين هي :

أ /	$-\infty;0$	ب /	$\left]-4\sqrt{3};4\sqrt{3}\right[$	ج /	$\left]-\sqrt{3};\sqrt{3}\right[$

التمرين الثالث (04 نقاط):

I) نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (u_n) حيث : $\begin{cases} u_1 = e^2 \\ u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{u_n} \end{cases}$

1. احسب كلا من u_2 و u_3.
2. أثبت بالتراجع أنّه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ: $u_n > \frac{1}{e}$
3. برهن أنّه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ثم استنتج تقارب المتتالية (u_n)

II) نضع لكلّ n من $\mathbb{N}^*$: $w_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln u_n$.

1) أثبت أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

2) عبّر عن w_n بدلالة n ثم استنتج أن: $u_n = e^{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 1}$ ثم احسب $\lim u_n$

3) احسب بدلالة n الجداء: $\pi_n = u_1 \times u_2 \times u_3 \times .... \times u_n$

4) **التمرين الرابع (07 نقاط):**

I) نعتبر الدالة العددية g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{-x} + x - 1$

1) أدرس تغيرات الدالة g.
2) احسب $g(0)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 / أ / بيّن أنّ: $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$ لكلّ x من $\mathbb{R}^*$

ب / احسب : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

2 / أ / بيّن أنّ : $f'(x) = \frac{(1+x)e^{-x}}{(x + e^{-x})^2}$ لكلّ x من $\mathbb{R}$.

ب / أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيّرات الدالة f.

3 / أ / أكتب معادلة المماس (Δ) للمنحني (C_f) عند النقطة O.

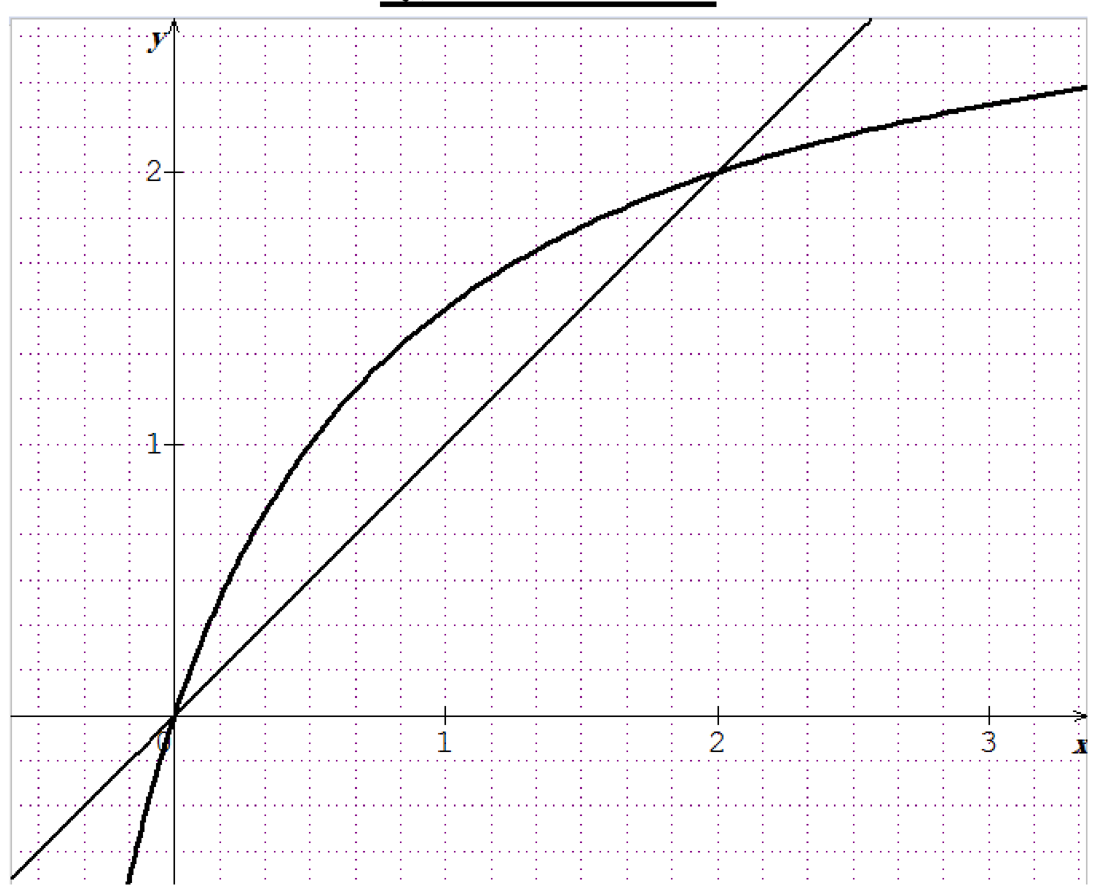
ب / تحقّق من أنّ: $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x)+1}$ لكلّ x من $\mathbb{R}$.ثم استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (Δ)

4 / أنشئ (Δ) و (C_f) ، (نأخذ $\frac{1}{1-e} \approx -0,6$)

5 / ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $\frac{xe^x}{xe^x + 1} - 1 = m$

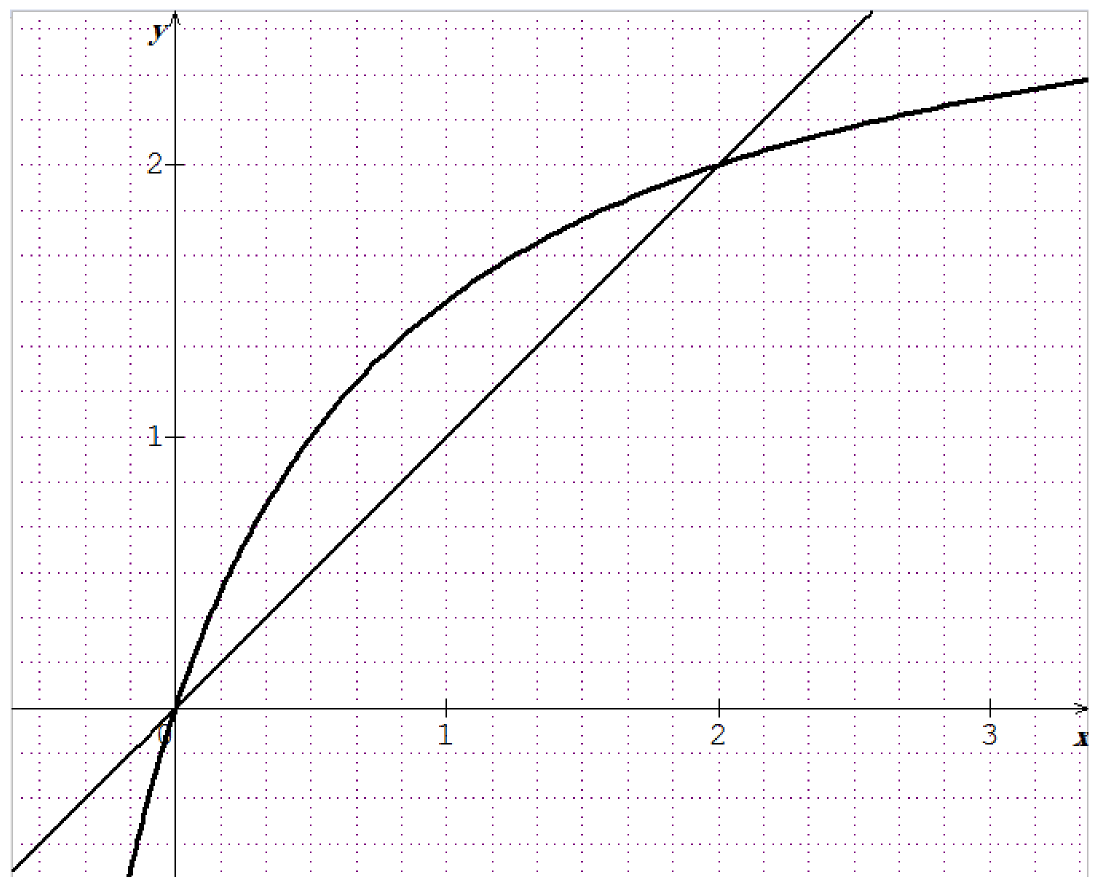
الوثيقة المرفقة

لا تكتب اسمك عليها



الوثيقة المرفقة

لا تكتب اسمك عليها



التصحيح النموذجي المفصّل

الموضوع الأول — **20 نقطة**

التمرين الأول — 05 نقاط

1/
$$z^2-2z+10=0$$
$$\Delta=-36=36i^2$$
$$z_1=1-3i \quad ; \quad z_2=1+3i$$
(0,75)

2 / أ /
$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=-2i$$ (0,25)
$$\frac{z_C-z_B}{z_A-z_B}=2e^{-i\frac{\pi}{2}}$$ (0,5)
$$CB=2AB\,;\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in Z$$
المثلث ABC قائم في B. (0,25)

2/ب/ مما سبق فإن:
$$BC=2BA;\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)=-\frac{\pi}{2}$$
$$z'=-2iz-5+5i$$
(0,5)

2/ج/ $z_E=4+3i\,;z_D=-2iz_E-5+5i$ (0,5)

2 / د / (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ بحيث:
$$\theta\in\mathbb{R}\ /\ z=z_E+2e^{i\theta}$$
$$z-z_E=2e^{i\theta};|z-z_E|=2;MB=2$$
(Γ) دائرة مركزها E ونصف قطرها 2
(0,25)

3/ أ/ $\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DB};z_F-z_D=3(z_B-z_D)$
$z_F=-2z_D+3z_B=1+15i$
(0,5)

3/ب/استنتاج نسبة التحاكي الذي مركزه B ويحول D إلى F .
$$\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}-3\overrightarrow{BD}$$
$$\overrightarrow{BF}=-2\overrightarrow{BD}$$
h تحاك نسبته -2 مركزهB أو تشابه مباشر نسبته 2 ومركزه B وزاويته π .
(0,5)

3/ج/ $S'=hoS$ مما سبق: S' تشابه مباشر مركزه B ونسبته 4 و زاويته $\frac{\pi}{2}$
(0,5)

3/د/ استنتج الخصائص الديكارتية للمجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل:
$S'=hoS$ / لدينا مما سبق $S(E)=D$ (0,25)
$$h(D)=F$$
$$S'(E)=h\left(S(E)\right)=h(D)=F$$ (0,25)
صورة الدائرة (Γ) هي الدائرة (Γ') التي مركزها F ونصف قطرها: $r'=4r=8$

التمرين الثاني — 04 نقاط

1 / أ / تمثيل الحدود : (0 ,5)

1 / ب / المتتالية (u_n) متزايدة ومتقاربة. (0,25)

2 / أ / الاستدلال بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0<u_n<2$.
نعتبر الخاصية $P(n):0<u_n<2$ نتحقّق من صحّة الخاصية من أجل $n=0$ $0<u_0<2$
الخاصية محقّقة من أجل $n=0$ أي $P(0)$ (0,25)

ولنفرض أنّها صحيحة من أجل n أي: $P(n)$ ولنثبت صحتها من أجل $n+1$
لدينا من فرضية التراجع أن: $0<u_n<2$
وبما أن f متزايدة تماما على $]0;2[$ فإن:
$$f(0)<f(u_n)<f(2)$$
$$0<u_{n+1}<2$$
الخاصية محقّقة من أجل $n+1$
ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0<u_n<2$.
(0 ,25)

2 / ب / أثبت أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما لدينا: $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n^2-2u_n}{u_n+1}$ (0,5)
مما سبق فإنّ $u_{n+1}-u_n>0$.
ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما. (0,25)

العلامة	الإجابة
0,25 / 0,5	بما أن (u_n) محدودة من الأعلى ومتزايدة فهي متقاربة ونهايتها هي l حيث : $f(l)=l$ لدينا $f(2)=2$ فإنّ: $\lim u_n=2$
0,5	3 / • الإثبات أن (v_n) متتالية هندسية $v_{n+1}=1-\frac{2}{u_{n+1}}=\frac{1}{3}v_n$ و $v_0=-1$ ؛ (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$
0,25	•كتابة v_n بدلالة n : $v_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$
0,25	استنتاج u_n بدلالة n: $u_n=\frac{-2}{v_n-1}=\frac{-2}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n-1}$
0,25	• $\lim u_n=2$ لأن $\lim -\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$

التمرين الثالث 04 نقاط

العلامة	الإجابة
0,75	1 / التحقق من أنّ $6x+3y+2z-6=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).بتعويض احداثيات النقط A ، B و C.
0,5	2/التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) $(D):\begin{cases} x=6t \\ y=3t ; t\in\mathbb{R} \\ z=2t \end{cases}$
0,5	3 / حساب إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستوي (ABC) والمستقيم (D). $H\left(\frac{36}{49};\frac{18}{49};\frac{12}{49}\right)$
0,75	4 / الاثبات أن المثلّث OAC قائم في O. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}=0$
0,5	5 / التحقّق أنّ الشعاع $\overrightarrow{OB}$ عمودي على كل من الشعاعين : $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OC}$ $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ و $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}=0$
0,5	6 / بيّن أن حجم رباعي الوجوه $OABC$ هو $1\,uv$ $V_{(OABC)}=\frac{1}{3}\left(\frac{OA.OC}{2}\right)OB=\frac{1}{3}\times\frac{2\times3}{2}=1\,uv$
0,5	$V_{(OABC)}=\frac{1}{3}\times S_{(ABC)}\times OH$ ، $S_{(ABC)}=\frac{3}{OH}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}u.s$ ، $OH=\frac{6}{7}$ لأن

التمرين الرابع 06,5 نقاط

I) $g(x)=x^2+3x-4+4\ln x$

العلامة	الإجابة
0,5	1/ g دالة تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{2x^2+3x+4}{x}>0$
0,5	ومنه g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$
0,25	**جدول التغيرات:**

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖	↗

العلامة	الإجابة
0,25	$g(1)=0$.
0,5	$g(x)<0$ من اجل كل x من $]0;1[$ و $g(x)>0$ من اجل كل x من $]1;+\infty[$

II) $f(x)=x+3\ln x-\frac{4\ln x}{x}$.

العلامة	الإجابة
0,5	1/ $\lim_{x\to 0^{>}} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
0,5	2/ أ /f دالة تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ لأنها عبارة مجموع وحاصل قسمة دوال تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g'(x)$
0,5	f متزايدة تماما على $[1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]0;1]$
0,25	ب /جدول التغيرات

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

العلامة	الإجابة
0,25	3/ دراسة وضعية الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة للمستقيم (D). $f(x)-x=\frac{(3x-4)\ln x}{x}$

x	0		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$		$+$	0	$+$	
$3x-4$	‖	$-$	0	$-$		$+$	
$\frac{(3x-4)\ln x}{x}$	‖	$+$		$-$	0	$+$	

العلامة	الإجابة
0,5	من أجل $x=1$ و $x=4/3$ (C) يقطع (D)
0,5	(C) تحت (D) من اجل كل x من $]1;4/3[$ و (C) تحت (D) من اجل كل x من $]0;1[\cup]4/3;+\infty[$

العلامة	عناصر الإجابة
0,5	الإثبات أنّ F دالة اصلية للدالة f على $]0;+\infty[$. بما أن الدالة F تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ و: $F'(x)=f(x)$ فإن F دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.
0,5	حساب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ $\int_1^e f(x)dx=[F(x)]_1^e=\frac{1}{2}(e^2+1)\times 9cm^2$

الموضوع الثاني 20 نقطة

التمرين الأول 05 نقاط

عناصر الإجابة	العلامة
1 / المستقيم (D) محتوى في المستوي (P) بتعويض احداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) في المعادلة الديكارتية للمستوي (P)	0,5
2 / تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A وَ $\vec{v}$ شعاع توجيه له: $\begin{cases} x=4k+1 \\ y=k+1 \quad /k\in\mathbb{R} \\ z=3k \end{cases}$	0,5
3 / الشعاع $\vec{u}$ شعاع توجيه للمستقيم (D):شعاع توجيه المستقيم (D) مرتبط خطيا مع $\vec{u}$	0,5

عناصر الإجابة	العلامة
$\vec{u}.\vec{n}=0$ وَ $\vec{v}.\vec{n}=0$ ومنه $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي(Q) ويشمل النقطة A: هي : $3x-4z-3=0$	0,5
المسافة بين النقطة $M(x;y;z)$ وكل من (P) و (Q).	0,5
$d(M;(P))=\frac{\lvert -4x-3y+1\rvert}{5}$	0,25
$d(M;(Q))=\frac{\lvert 3x-4z-3\rvert}{5}$	0,25

مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية المسافة عن كل من (P) و (Q) هي اتحاد مستويين (P_1) و (P_2)

$$\frac{\lvert -4x-3y+1\rvert}{5}=\frac{\lvert 3x-4z-3\rvert}{5}$$

$$\lvert -4x-3y+1\rvert=\lvert 3x-4z-3\rvert$$

$$\left(\lvert -4x-3y+1\rvert\right)=\left(\lvert 3x-4z-3\rvert\right)^2$$

$$(-4x-3y+1)^2=(3x-4z-3)^2$$

$$(-4x-3y+1)^2-(3x-4y-3)^2=0$$

$$(-4x-3y+1+3x-4z-3)[-4x-3y+1-(3x-4z-3)]=0$$

$$(-x-3y-4z-2)(-7x-3y+4z+4)=0$$

(0,75)

إما: $-x-7y-2=0$ أو $-7x+y+4=0$ وهو اتحاد المستويين (0,25)

$(P_1):-x-3y-4z-2=0$ و $(P_2):-7x-3y+4z+4=0$ و (P_1) ، (P_2) متعامدان. (0,25)

5 / نحل الجملة : $\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 3x-4z-3=0 \\ x+3y+4z+2=0 \end{cases}$، حل الجملة $\begin{cases} 4x+3y-1=0 \\ 3x-4z-3=0 \end{cases}$ هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) ،

ثم بالتعويض في المعادلة الثالثة نجد: $0=0$

و منه مجموعةالنقط M المطلوبة هي االمستقيم (D) . (0,75)

التمرين الثاني 04 نقاط

الإجابة	العلامة
1 / أ / $\theta=\frac{\pi}{2}$ لأن : $\theta=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$	01
2 / أ / $A=2$ لأن: $A=e^{i\frac{2016\pi}{6}}+e^{-i\frac{2016\pi}{6}}$ $A=e^{i336\pi}+e^{-i336\pi}$ $A=1+1=2$	01
3 / أ / $\theta=\frac{\pi}{2};k=\sqrt{3}$ لأن: $\frac{z_C-z_E}{z_A-z_E}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$	01
4 / ب / $\alpha\in\left]-4\sqrt{3};4\sqrt{3}\right[$ لأن $\Delta=\alpha^2-48$ الحلان مترافقان معناه $\Delta<0$	01

التمرين الثالث 04 نقاط

الإجابة	العلامة
1 / حساب u_2 و u_3.: $u_2=\sqrt{e}$ و $u_3=e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\sqrt{e}}$	0,5
2 / البرهان بالتراجع أنّه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ: $u_n>\frac{1}{e}$. نسمي الخاصية : $P(n):u_n>\frac{1}{e}$ نتحقّق من صحّة الخاصية من أجل $n=1$ $u_1=e^2>\frac{1}{e}$ الخاصية محقّقة من أجل $n=1$ أي $P(1)$	0,25
نفرض أنّها صحيحة من أجل n ولنثبت صحّتها من أجل $n+1$ أي: $P(n):u_n>\frac{1}{e}$ $P(n+1):u_{n+1}>\frac{1}{e}$ $P(n):u_n>\frac{1}{e}$ لدينا: $u_n>\frac{1}{e}$ ، $\sqrt{u_n}>\sqrt{\frac{1}{e}}=e^{-\frac{1}{2}}$ ، $e^{-\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}>e^{-\frac{1}{2}}\times e^{-\frac{1}{2}}=e^{-1}$ ، أي: $u_{n+1}>\frac{1}{e}$ الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ: $u_n>\frac{1}{e}$.	0,25
3 / البرهان أنّه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإنّ: $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$. لدينا: $\frac{e^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{u_n}}{u_n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n^2}}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{u_n}}$ لدينا ممّا سبق: $u_n>\frac{1}{e}$ ، $\sqrt{u_n}>\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$	0,5
أي: $\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}\sqrt{u_n}}<\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}\times e^{-\frac{1}{2}}}=1$ ومنه: $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ نستنتج	
بقية السؤال 3 / أنّ (u_n) متناقصة تماما وبما أنّ (u_n) محدودة من الأسفل فهي متقاربة.	0,25
1 / الإثبات أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. لدينا: $w_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln u_{n+1}$ $w_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}.\sqrt{u_n}\right)$ $=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln u_n\right)$ $=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln u_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\ln u_n$ $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln u_n\right)=\frac{1}{2}w_n$	0,5
2 / كتابة w_n بدلالة n: $w_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln e^2=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ $w_n=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=3\left(\frac{1}{2}\right)^n$	0,5
كتابة u_n بدلالة n. $\ln u_n=2w_n-1$ و $u_n=e^{2w_n-1}=e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}$	0,5
حساب $\lim u_n=\lim e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}=\frac{1}{e}$	0,25
3 / حساب بدلالة n الجداء: $\pi_n=u_1\times u_2\times u_3\times....\times u_n$ $\pi_n=e^{6+6\left(\frac{1}{2}\right)+6\left(\frac{1}{2}\right)^2+...+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n}$ $\pi_n=e^{6\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right)-n}=e^{12\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)-n}$	0,5

التمرين الرابع **07 نقاط**

I)

$g(x)=e^{-x}+x-1$

1 / دارسة اتجاه تغيرات الدالة g.

g دالة تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقّة: — 0,25

$g'(x)=-e^{-x}+1$

$g'(x)<0$ من أجل كل x من $]-\infty;0[$ ومنه g متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ — 0,5

$g'(x)>0$ من أجل كل x من $]-\infty;0[$ ومنه g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ — 0,5

2 / $g(0)=0$ ومنه: $g(x)\geq 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ — 0,5

II) — 0,25

1 / أ / $f(x)=\dfrac{x}{x+e^{-x}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{xe^{x}}}$

1/ب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ — 0,5

إذن تمثيل الدالة f يقبل مستقيمين مقاربين معادلتاهما $y=0$ و $y=1$. — 0,5

2/أ/ $f'(x)=\dfrac{(1+x)e^{-x}}{(x+e^{-x})^{2}}$ — 0,25

2/ب/ إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x+1)$ — 0,5

$f'(x)<0$ من أجل كل x من $]-\infty;-1[$

f متناقصة تماما على $]-\infty;-1]$

$f'(x)>0$ من أجل كل x من $]-1;+\infty[$

f متزايدة تماما على $[-1;+\infty[$

جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(-1)$	↗	1

$f(-1)=-\dfrac{1}{-1+e}\approx -0,6$ — 0,25

3/أ/ $(\Delta): y=x$. — 0,5

3/ب/ $x-f(x)=\dfrac{xg(x)}{g(x)+1}$ — 0,25

دراسة إشارة الفرق

إشارة: $x-f(x)$ من إشارة x لأنّ $g(x)\geq 0$

(Δ) فوق (C_f) من أجل كل x من: $]0;+\infty[$ — 0,5

(Δ) تحت (C_f) من أجل كل x من: $]-\infty;0[$

(Δ) يقطع (C_f) من أجل كل $x=0$ — 0,25

4/ إنشاء (Δ) و (C_f) — 0 ,75

5/

المناقشة البيانية: المناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: — 0,25

$\dfrac{xe^{x}}{xe^{x}+1}-1=m$ تكافئ: $f(x)=m+1$.

إذا كان $m\in]-\infty;f(-1)-1[\cup[0;+\infty[$ ليس للمعادلة حل.

إذا كان $m=\dfrac{2-e}{e-1}$ للمعادلة حل مضاعف -1 — 0,5

إذا كان $m\in]f(-1)-1;-1]$ للمعادلة حلان سالبان.

إذا كان $m\in[-1;0[$ للمعادلة حل موجب.

الجمهوريـة الجزائـرية الديمقراطيـة الشعبيـة

مديرية التربية لولاية فيس بوك — ثانوية فايس بوك

Yousfi Math
Yousfisifou804@yahoo.fr

امتحان البكالوريا التجريبي * دورة ماي 2016 *

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة الريـاضيات — المـدة : 03 ساعات و 30 د

على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

* التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقطة A ذات اللاحقة $z_A=1+i$

1) أ) عيّن ثمّ أنشئ (C) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z=z_A+2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$.

ب) عيّن ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $z=z_A+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و k يمسح $\mathbb{R}^+$

ج) اكتب العدد $z_D=2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ على الشكل الجبري (z_D هي لاحقة النقطة D)

د) حدد إحداثيات نقطة تقاطع (C) و (Δ) بيانيا ثم حسابيا .

2) نسمي B النقطة التي لاحقتها z_B حيث $z_B=z_A+2e^{i\frac{3\pi}{4}}$

أ) عيّن الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_A}$، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

ب) عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

ج) بين ان النقطة O هي مرجحا للجملة $\left\{\left(A;\left(1+\sqrt{2}\right)\right),\left(C;-1\right)\right\}$

د)عيّن عناصر المجموعة (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

* التمرين الثاني : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط:

$A(1;-1;3)$ ، $B(0;3;1)$ ، $C(2;1;3)$. $D(6;-7;-1)$, , $E(4;-6;2)$

1) أ - بيّن أنّ E مرجح الجملة $\left\{(A;2);(B;-1);(D;1)\right\}$

ب. حدد طبيعة المجموعة (S)مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق :

$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|=2\sqrt{14}$ ثم حدد عناصرها المميزة

2) أ. بيّن أنّ النقط A ، B و C تحدد مستوي

ب.بين ان المستقيم (ED)عمودي على المستوي (ABC)

ج - استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3) أ). اعط تمثيل وسيطي للمستقيم (ED).

ب) عين احداثيات F نقطة تقاطع المستقيم (ED)و المستوي (ABC)

ج). بين ان تقاطع المجموعة (S) و المستوي (ABC) هي النقطة F

* التمرين الثالث : (04 نقاط)

1) لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;6[$ بـ: $f(x)=\frac{9}{6-x}$ المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=2cm;\left\|\vec{j}\right\|=2cm$ و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في هذا المعلم

ادرس تغيرات الدالة ثم شكل جدول تغيراتها وانشئ منحناها البياني في المعلم .

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_0=-3$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) باستخدام (C_f) و المستقيم $y=x$ مثل على محور الفواصل الحدود $u_0;u_1;u_2$ دون حساب

ب) ما تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

3) ا) بين ان من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n<3$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج) استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $v_n=\dfrac{1}{u_n-3}$

ا)احسب الفرق $(v_{n+1}-v_n)$ ثم بين أن (v_n) متتالية حسابية اساسها $r=-\dfrac{1}{3}$ يطلب حدها الاول

ب) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم عبر عن u_n بدلالة n

ج) تحقق من السؤال 3 -ج

* التمرين الرابع : (07 نقاط)

I/ : نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-5+5\ln x$ و g' الدالة المشتقة للدالة g

1) أحسب نهاية الدالة g عند اطراف المجال $]0;+\infty[$

2) احسب $g'(x)$ ثم عين اشارتها واستنتج اتجاه تغير الدالة g

3) استنتج جدول تغيرات الدالة g

4) بين ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α ينتمي الى المجال $[1.8;1.9]$

5) استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$



II/لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{(x-5)\ln x}{x}$

يمكن كذلك كتابتها اما بـــــــــــــــــــــــ : $f(x)=\dfrac{1}{x}(x-5)\ln x$ او $f(x)=\ln x-\dfrac{5\ln x}{x}$

1) ا) احسب $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) ا) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج) بين ان $f(\alpha)=-\dfrac{\alpha}{5}+1-\dfrac{5\ln\alpha}{\alpha}$ ثم من اجل $\alpha=1.87$ اعطا قيمة ل $f(\alpha)$

3) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm;\|\vec{j}\|=2cm$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في هذا المعلم

أ) عين معادلة للمستقيم (Δ) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

ب)احسب $f(1)$ ماذا تستنتج ؟

ج) انشئ كل من المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

III/ لتكن الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $F(x)=x\ln x-x-\dfrac{5}{2}(\ln x)^2$

1) بين ان F هي دالة اصلية للدالة f

2) ا) احسب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=e$

ب) احسب المساحة بالـــــ : cm^2 ثم حددها على المنحنى

IV/ m وسيط حقيقي ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد حلول و اشارة المعادلة $x(-\ln x+m)=-5\ln x$

الموضوع الثاني

* التمرين الأول : (04 نقاط)

1. p كثير حدود للمتغير المركب z

أ- بين ان العدد الحقيقي 1 جذر لكثير الحدود $p(z)=z^3+z^2+3z-5..........(1)$

ب - بين ان $p(z)=(z-1)(z^2+2z+5)$

ج - حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة $p(z)=0$

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب

$z_A=1$ ، $z_B=-1+2i$ ، $z_C=-1-2i$

- اكتب العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي واستنتج طبيعة المثلث ABC.

3. لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z=1+2e^{i\theta}$ مع $\theta\in]-\pi;\pi[$

ولتكن (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $z=-1-2i+\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$.

أ - تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Δ). حيث $(\Delta):-x+y+1=0$

ب - اكتب معادلة ديكارتية ل (E) و $(\Delta):-x+y+1=0$ ؛ ثم عيّن نقطتي تقاطع (Δ) و (E)

4. ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C ويحول A إلى B

أ - اكتب العبارة المركبة للتشابه S وعين نسبته وزاويته.

ب - عيّن (E') صورة (E) بالتشابه S.

* التمرين الثاني : (05 نقاط)

نعتبر المتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب $u_1=\sqrt{e}$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1) احسب u_4,u_3,u_2 (تدور النتائج الى 10^{-2}) ما تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) أ) برهن بالتراجع ان من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ان : $u_n\leq n+3$

ب) اثبت ان من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ان : $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

ج) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) نعتبر المتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب $v_n=u_n-n$

ا) بين أن (v_n) متتالية هندسية اساسها $q=\frac{2}{3}$ يطلب حدها الاول وحدها العام

ب)بين ان من اجل كل $n\geq 1$ ان : $u_n=n+(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

4) من اجل كل $n\geq 1$ نضع : $S_n=V_1+V_2+......+v_n$ و $S'_n=u_1+u_2+......+u_n$

ا) احسب المجموع S_n و S'_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S'_n}{n^2}$

* التمرين الثالث : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط:

$A(2;1;3)$ ، $B(-3;-1;7)$ ، $C(3;2;4)$.

1) - بيّن أنّ النقط A ، B و C ليست في استقامة

2) ليكن (Δ) مستقيم تمثيله الوسيطي $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-7+2t\\y=-3t\\z=4+t\end{cases}$

أ.بين ان (Δ) عمودي على المستوي (ABC)

ب ـ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3) لتكن H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC)

أ - بيّن أنّ H مرجح الجملة $\{(A;-2);(B;-1);(C;2)\}$

ب ـ حدد طبيعة المجموعة (p) مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق :

$\left(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)=0$ ثم حدد عناصر ها المميزة

وبين ان معادلتها الديكارتية هي $2x+y-z+18=0$

ج. حدد طبيعة المجموعة (S) مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق :

$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$ ثم حدد عناصر ها المميزة

د. بين ان تقاطع المجموعتين (p) و (S) هو دائرة (C) لا يطلب تحديد عناصرها

ه. هل النقطة $S(-8;1;3)$ تنتمي الى (C)

* <u>التمرين الرابع : (07 نقاط)</u>

المستوى منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=1+4xe^{2x}$

1.احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و بين ان $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$

2.بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$. وادرس تغيرات الدالة ثم شكل جدول التغيرات

3.بين ان العدد $g\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(1-\frac{2}{e}\right)$ هو قيمة حدية صغرى للدالة g

4. استنتج حسب قيم x من $\mathbb{R}$: $g(x)>0$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في هذا المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm;\|\vec{j}\|=2cm$

1.أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2- أ. بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$:

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3-أ. بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x+1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (c_f) بجوار $-\infty$

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (c_f) و المستقيم (Δ).

4-أ. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند النقطة التى فاصلتها 0 .

ب.بين ان المنحنى (c_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $-\frac{1}{2}$. وترتيبها $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{e}\right)$

جـ. احسب $f(0)$ ما ذا تستنتج

د. ثم انشئ (T) و (Δ) والمنحنى (c_f) .

III- 1- أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة , اثبت أن : $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}$

ب.لتكن A المساحة بالسنتمتر مربع للحيز المستوى المحدد بالمنحنى (c_f) و المستقيم (T) و المستقيمين

اللذين معادلتاها , $x=0$, $x=\frac{1}{2}$

2 - بين أن : $A=(6-2e)cm^2$



التمرين رقم 1 الحل

$\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$، النقطة A ذات اللاحقة $z_A=1+i$

0.5 1) أ) تعيّن (C) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوى حيث:
$z=z_A+2e^{i\theta}$ و θ يمسح $\mathbb{R}$. المجموعة هي من الشكل
$z-z_A=2e^{i\theta}$ دائرة مركزها A ونصف قطرها $r=2$

0.5 ب) (Δ) مجموعة النقط من المستوى حيث: $z=z_A+ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$

المجموعة هي من الشكل $z-z_A=ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ نصف مستقيم مبدؤه A وموجه بزاوية $\frac{3\pi}{4}$

0.5 ج) كتابة العدد $z_D=2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ على الشكل الجبري.

0.5 ومنه $z_D=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$z_D=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

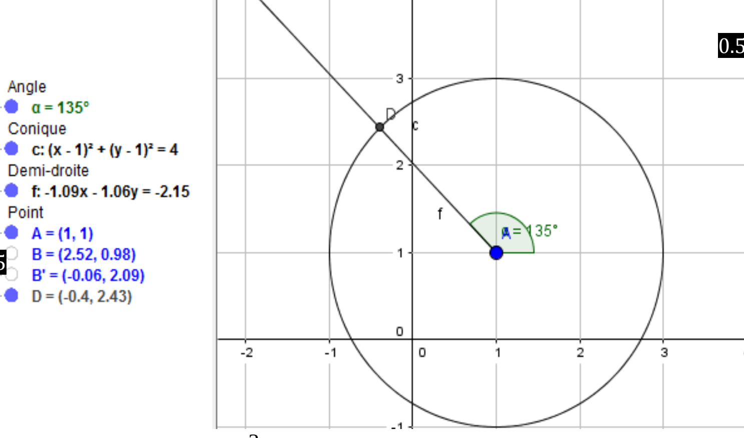
0.5 د) إحداثيات نقطة تقاطع (C) و (Δ) بيانيا ثم حسابيا.

حسابيا $z-z_A=ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$ و $z=z_A+2e^{i\theta}$ ومنه $ke^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{i\theta}$

نجد احداثيي نقطة التقاطع

$$(k;\theta)+A=\left(2;\frac{3\pi}{4}\right)+A=\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$$

0.5



2) نسمي B النقطة التي لاحقتها z_B حيث $z_B=z_A+2e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ومنه

0.5 $z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

0.5 أ) الشكل الجبري للعدد المركب

$\frac{z_B-z_A}{z_A}=\frac{2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{2}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{2}{\sqrt{2}}i$ ،

ومنه $\frac{z_B-z_A}{z_0-z_A}=-\frac{2}{\sqrt{2}}i$ طبيعة المثلث OAB قائم في O .

0.5 ب) z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ اي $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $(z_C-z_A)=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B-z_A)$

ومنه $z_C=-i\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)+1+i$ اي $z_C=\left(\sqrt{2}+1\right)+i\left(1+\sqrt{2}\right)$

0.25 ج) بين ان النقطة O هي مرجحا للجملة

$\left\{\left(A;\left(1+\sqrt{2}\right)\right),\left(B;-1\right)\right\}$

نلاحظ ان $1+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}\neq 0$ ومنه المرجح موجود لدينا

$z_C=-i\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)+1+i$ ونلاحظ ان

$\left(1+\sqrt{2}\right)+i\left(1+\sqrt{2}\right)+i\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)-1-i=0$ و

$1+\sqrt{2}+i+i\sqrt{2}-\sqrt{2}-i\sqrt{2}-1-i=0$

0.5 د) عناصر المجموعة (E) مجموعة النقط M من المستوى حيث:

$\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$

O هي مرجحا للجملة $\left\{\left(A;\left(1+\sqrt{2}\right)\right),\left(B;-1\right)\right\}$ ومنه

$\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=\sqrt{2}.\overrightarrow{OM}$

$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}$ مستقلة عن M لان $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}$

ومنه $\left(\left(1+\sqrt{2}\right)\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right).\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=-\sqrt{2}.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AC}$

يصبح $-\sqrt{2}.\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AC}=0$ اي $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AC}=0$

المجموعة (E) هي مستقيم يشمل O و $\overrightarrow{AC}$ شعاع ناظم له

التمرين رقم 2 الحل

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، نعتبر النقط:

$C(2;1;3)$ $D(6;-7;-1)$ $E(4;-6;2)$ ، $A(1;-1;3)$ $B(0;3;1)$

0.5 1) أ ـــ اثبات أنّ E مرجح الجملة $\left\{(A;2);(B;-1);(D;1)\right\}$

بما ان مجموع المعاملات يساوي 2 غير معدوم المرجح موجود

ومنه $x_E=(2\times1+-1\times0+1\times6)/2=4$ و

$y_E=(2\times-1+-1\times3+-7\times1)/2=-6$

و $z_E=(2\times3+-1\times1-1\times1)/2=2$

0.5 ب. طبيعة المجموعة (S) مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق
: $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right\|=2\sqrt{14}$

لدينا E مرجح الجملة $\left\{(A;2);(B;-1);(D;1)\right\}$ ومنه من اجل كل M من الفضاء $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ME}$

ومنه $ME=\sqrt{14}$ وبالتالي (S) هي سطح كرة مركزها E ونصف قطرها $\sqrt{14}$

ومنه $(S):(x-4)^2+(y+6)^2+(z-2)^2=14$

2) أ. اثبات أنّ النقط A ، B و C تحدد مستوى لدينا **0.5**

$\overrightarrow{AC}(1;2;0)$ و $\overrightarrow{BC}(2;-2;2)$ غير مرتبطة خطيا لان

$\frac{1}{2}\neq\frac{2}{-2}\neq\frac{0}{2}$ ومنه A ، B و C تحدد مستوى

ب. المستقيم (ED) عمودي على المستوى (ABC) يعني ان **0.25**

$\overrightarrow{ED}$ عمودي على شعاعي توجيه (ABC)

لدينا $\overrightarrow{ED}(2;-1;-3)$ و منه $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{BC}=0$ و $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{AC}=0$ لأن

$4+2-6=0$ و كذلك $2-2+0=0$

0.5 ج ــ المعادلة ديكارتية ل (ABC) الذي يشمل A وناظمه $\overrightarrow{ED}$ هي **0.5**

$(ABC):2x-y-3z+6=0$

3) أ. التمثيل و سيطي للمستقيم (ED) هو :

$$\begin{cases}x=4+2t\\ y=-6-t & t\in\mathbb{R}\\ z=2-3t\end{cases}$$

ب) احداثيات F نقطة تقاطع المستقيم (ED) و المستوى (ABC) **0.5**

نحل الجملة $\begin{cases}x=4+2t\\ y=-6-t & t\in\mathbb{R}\\ z=2-3t\end{cases}$,

$2x-y-3z+6=0$ نجد $8+4t+6+t-6+9t+6=0$ ومنه **0.25**

$t=-1$ ومنه $F(2;-5;5)$ **01**

ج). تقاطع المجموعة (S) و المستوى (ABC) هي النقطة F **0.5**

نقوم بحساب البعد بين مركز (S) و المستوى (ABC) نجد

$$d((ABC),E)=\frac{|2(2)+5-15+6|}{\sqrt{4+1+9}}=0$$

ومنه بما ان $d<r$ (S) تقاطع (S) و المستوى (ABC) هو دائرة

وبما ان $F\in(S)$ لان

$(S):(2-4)^2+(-5+6)^2+(5-2)^2=14$

و $F\in(ABC)$ لان $2(2)+5-15+6=0$ **0.5**

اذن تقاطع المجموعة (S) و المستوى (ABC) هي النقطة F

التمرين رقم 3 الحل

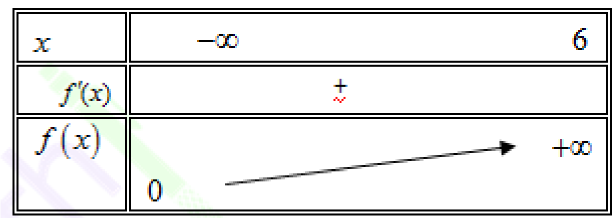
1) لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;6[$ بـــ: $f(x)=9/(6-x)$

دراسة تغيرات الدالة ثم شكل جدول تغيراتها وانشئ منحناها البياني **01**

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-\infty;6[$ ومنه $f'(x)=9/(6-x)^2$ ومنه

بما ان $f'(x)>0$ فان f موجبة متزايدة تماما على $]-\infty;6[$ **0.5**

جدول التغيرات



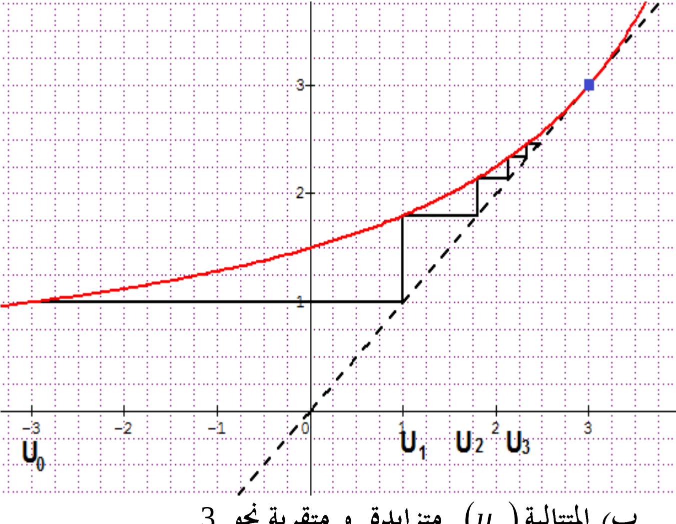
x	$-\infty$ 6
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

$\lim\limits_{x\to6^{<}} f(x)=\lim\limits_{x\to6}\frac{\;}{6-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\;}{6-x}=0$

2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب $u_0=-3$ و $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) تمثيل على محور الفواصل الحدود $u_0;u_1;u_2$ دون حساب

المنحنى (C_f)



ب) المتتالية (u_n) متزايدة و متقاربة نحو 3

3) ا) بيان ان من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n<3$

من اجل $n=0$ فان $-3<3$ ومنه $p(0)$ صحيحة لان $u_0<3$

بفرض الخاصية $p(n)$ صحيحة من اجل n أي $u_n<3$ ولنفرض

صحة الخاصية $p(n+1)$ من اجل أي ان $n+1$ أي ان $u_{n+1}<3$

البرهان : نعلم ان $u_n<3$ بالضرب في -1 واضافة 6 نجد $6-u_n>3$

بقلب العلقة والضرب في 9 نجد $\frac{9}{6-u_n}<3$ ومنه $u_{n+1}<3$

ومنه الخاصية $p(n+1)$ صحيحة اذن $u_n<3$

ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n)

لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{9}{6-u_n}-u_n=\frac{u_n^2-6u_n+9}{6-u_n}=\frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}$

ومنه $\frac{(u_n-3)^2}{6-u_n}\geq0$ بما ان $u_n<3$ فان $u_{n+1}-u_n>0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة على $]-\infty;6[$

ج) المتتالية (u_n) محدود من اعلى ب 3 ومتزايدة فهي متقاربة



نهايتها : (u_n) متقاربة يعني ان $\lim_{x\to\infty} u_n=\alpha$ ومنه $f(\alpha)=\alpha$ يعني ان $\frac{9}{(6-x)}=\alpha$ اي $(\alpha-3)^2=0$ نجد $\alpha=3$ اي $\lim_{x\to\infty} u_n=3$

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $v_n=\frac{1}{u_n-3}$

0.5 ا) حساب الفرق $(v_{n+1}-v_n)$ لدينا $(v_{n+1}-v_n)=\frac{1}{u_{n+1}-3}-\frac{1}{u_n-3}$

ومنه $(v_{n+1}-v_n)=\frac{1}{\frac{9}{6-u_n}-3}-\frac{1}{u_n-3}$ ومنه

$$=\frac{1}{\frac{-9+3u_n}{6-u_n}}-\frac{1}{u_n-3}=\frac{6-u_n}{3(u_n-3)}-\frac{1}{u_n-3}$$

$$(v_{n+1}-v_n)=\frac{6-u_n}{3(u_n-3)}-\frac{3}{3(u_n-3)}=-\frac{1}{3}\frac{u_n-3}{(u_n-3)}=-\frac{1}{3}$$

بيان أن (v_n) متتالية حسابية لدينا $(v_{n+1}-v_n)=-\frac{1}{3}$ صيغة متتالية حسابية اساسها $r=-\frac{1}{3}$ حدها الاول هو $v_0=-\frac{1}{6}$

0.5 ب) عبارة الحد العام v_n بدلالة n هي $v_n=-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n$

ومنه بما ان $v_n=\frac{1}{u_n-3}$ فان $u_n=\frac{1}{v_n}+3$ ومنه

$u_n=\frac{1}{-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n}+3$ اي $u_n=\frac{6}{-1-2n}+3$

0.25 ج) التحقق من السؤال 3 – ج لدينا $\lim_{x\to+\infty} u_n=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{-1-2n}+3=3$

5) ا) حساب المجموع $S_n=v_0+v_1+......+v_n$

عدد الحدود هو $n+1$ ومنه $S_n=\frac{(n+1)}{2}(v_0+v_n)$ ومنه

$S_n=\frac{(n+1)}{2}\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}n\right)$ ومنه

$S_n=\frac{(n+1)}{2}\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}n\right)$ ومنه $S_n=-\frac{(n+1)}{6}(1+n)$ ومنه

$$S_n=-\frac{(n+1)^2}{6}$$

01 ب) تعيين قيمة n حيث $S_n=-6$ اي

$-\frac{(n+1)^2}{6}=-6$ ومنه $(n+1)^2=36$ ومنه $(n+1)^2=36$ ومنه

$n=5$

التمرين رقم 4 الحل

الحل : جزء1:

g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-5+5\ln x$

0.25 **1)** نهاية الدالة g عند $+\infty$ و عند 0

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x-5+5\ln x=+\infty$ و

$\lim_{x\to 0^>} g(x)=\lim_{x\to 0^>} x-5+5\ln x=-\infty$

0.5 **2)** احسب $g'(x)$ ثم عين اشارتها واستنتج اتجاه تغير الدالة g

المشتقة : الدالة g تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة : $g'(x)=1+\frac{5}{x}$

اشارة المشتقة من اشارة $\frac{5}{x}$ موجبة تماما ومنه الدالة g متزايدة على $]0;+\infty[$

0.25 **3)** جدول التغيرات

x	0 α $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

0.5 **4)** بيان ان المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α ينتمي الى $[1.8;1.9]$

بما ان الدالة g متزايدة على المجال $]0;+\infty[$ ومستمرة لانها مجموع دالتين مستمرتين فهي رتيبة على المجال $]0;+\infty[$ ما يعني انها كذلك مستمرة ورتيبة على المجال $[1.8;1.9]$

وبما ان $g(1.8)\simeq-0.003$ و $g(1.9)=0.25$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α ينتمي الى $[1.8;1.9]$

0.25 **5)** استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

$g(x)>0$ على المجال $]\alpha;+\infty[$ و $g(x)<0$ على المجال $]0;\alpha[$

الحل: جزء2:

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ:

$f(x)=\frac{(x-5)\ln x}{x}$ صيغها $f(x)=\frac{1}{x}(x-5)\ln x$ او

$f(x)=\ln x-\frac{5\ln x}{x}$

0.25 **(1** ا) النهاية

$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to0}(x-5)\lim_{x\to0}\ln x=+\infty$ المنحنى (C_f) يقبل محور التراتيب كمقارب

0.25 ب) النهاية $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln x-\lim_{x\to+\infty}\frac{5\ln x}{x}=+\infty$

2) ا) بيان أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

0.25

المشتقة : الدالة f تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة :

$$f'(x)=f'(x)=\frac{1}{x}-5\frac{(1/x)x-\ln x\times 1}{x^2}$$

$$=\frac{1}{x}-5\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x-5(1-\ln x)}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

اشارة المشتقة من اشارة $g(x)$ ومنه f متزايدة على المجال $]\alpha;+\infty[$ و f متناقصة على المجال $]0;\alpha[$

01

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

0.25

x	0 α $+\infty$
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	$+\infty$ ↘ ↗ $+\infty$

0.5

ج) بيان ان $f(\alpha)=-\frac{\alpha}{5}+1-\frac{5\ln\alpha}{\alpha}$ ثم من اجل $\alpha=1.87$ اعطاء قيمة ل $f(\alpha)$

0.5

0.5

لدينا $f(x)=\ln x-\frac{5\ln x}{x}$ و $g(x)=x-5+5\ln x$ ومنه

$$f(x)=\frac{g(x)-x+5}{5}-\frac{5\ln x}{x}$$

ومنه $f(\alpha)=\frac{g(\alpha)-\alpha+5}{5}-\frac{5\ln\alpha}{\alpha}$ اذن $f(\alpha)=-\frac{\alpha}{5}+1-\frac{5\ln\alpha}{\alpha}$

0.5

من اجل $\alpha=1.87$ نجد $f(\alpha)\simeq-1.05$

3) المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm;\|\vec{j}\|=2cm$

0,5

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في هذا المعلم

ا) معادلة للمستقيم (Δ) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة الفاصلة 1

0.5

لدينا $y=f(1)+(x-1)f'(1)$ ومنه $y=0+(x-1).(-4)$ اذن

$$y=-4x+4$$

ب) $f(1)=0$ المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة $(1;0)$

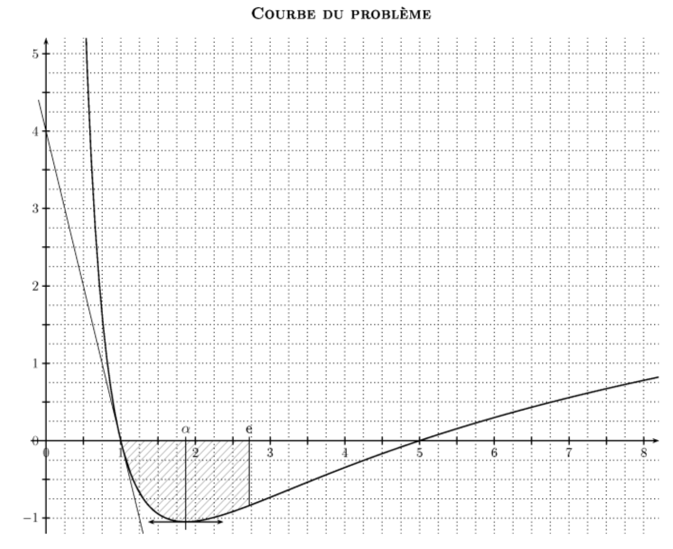
0.25

ج) انشئ كل من المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

الحل: جزء3:

لتكن الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ :

$$F(x)=x\ln x-x-\frac{5}{2}(\ln x)^2$$



1) بيان ان F هي دالة اصلية للدالة f الدالة F تقبل الاشتقاق ومنه

$$F'(x)=x\frac{1}{x}+\ln x-1-\frac{5}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{x}\ln x$$

$$F'(x)=1-1+\ln x-5\frac{\ln x}{x}=\ln x-\frac{5\ln x}{x}=f(x)$$

2) ا) حساب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1$ و $x=e$

لدينا $-\int_1^e f(x)dx=-F(e)+F(1)=-1-\left(e-e-\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}$

ب) حساب المساحة بالـــــــــــــــــ : cm^2 ثم حددها على المنحنى $A=\frac{3}{2}\times 2cm\times 2cm=6cm^2$

الحل: جزء4:

m وسيط حقيقي

المناقشة حسب قيم الوسيط m عدد حلول واشارة المعادلة $x(-\ln x+m)=-5\ln x$

ومنه $-\ln x+m=\frac{-5\ln x}{x}$ ومنه $m=\ln x-\frac{5\ln x}{x}$ اي $f(x)=m$

الحلول هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=m$

ومنه $m\in]-\infty;f(\alpha)[$ المعادلة لا تقبل حلول

ومنه $m=f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب

ومنه $m\in]f(\alpha);+\infty[$ المعادلة تقبل حلين موجبين



التمرين رقم 1 الحل

1. p كثير حدود للمتغير المركب z

أ– اثبات ان العدد الحقيقي 1 جذر لكثير الحدود 0.25

$$p(z)=z^3+z^2+3z-5..........(1)$$ 0.5

لدينا $p(1)=1^3+1^2+3-5=0$ ومنه 1 جذر لكثير الحدود

ب – اثبات ان $p(z)=(z-1)(z^2+2z+5)$ بالنشر نجد

$$p(z)=z^3+2z^2+5z-z^2-2z-5=z^3+z^2+3z-5$$ 0.25

ج – حلول المعادلة $p(z)=0$ 0.5

أي ان $z^2+2z+5=0$ ومنه $\sqrt{\Delta}=i4$ نجد $z_1=-1+2i$ ،

$z_2=-1-2i$ او $z-1=0$ نجد $z_3=1$

الحلول هي $z_1=-1+2i$ ، $z_2=-1-2i$ و $z_3=1$

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس نعتبر النقط **A**، **B** و **C** لواحقها على الترتيب

$z_A=1$ ، $z_B=-1+2i$ ، $z_C=-1-2i$

0.5 — كتابة العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي

لدينا $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{-1-2i-1}{-1+2i-1}=\frac{-2-2i}{-2+2i}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ 0.5

طبيعة المثلث ABC . قائم في **A** ومتساوي الساقين

3. (E) مجموعة النقط **M** من المستوي ذات اللاحقة **z** بحيث:

$z=1+2e^{i\theta}$ مع $\theta\in]-\pi;\pi[$

(Δ) مجموعة النقط **M** من المستوي ذات اللاحقة **z** بحيث:

$z=-1-2i+\lambda e^{i\frac{\pi}{4}}$ مع $\lambda\in\mathbb{R}$.

0.5 أ — النقطة **A** تنتمي إلى (Δ) . لان $A(1;0)$ أي $(\Delta):-1+0+1=0$

ب — معادلة ديكارتية ل (E)

01 (E) مجموعة النقط $z-z_A=2e^{i\theta}$ *هي دائرة مركزه A ونصف قطرها* 2 معادلتها $(x-1)^2+y^2-4=0$ و $(\Delta):-x+y+1=0$؛

نقطتي تقاطع (Δ) و (E) لدينا من (Δ) : $-x+y+1=0$ ومنه

$x=y+1$ بالتعويض في (E) نجد $y^2=2$

0.5 من اجل $y=\sqrt{2}$ النقطة الاولى لاحقتها $z'=\sqrt{2}+1+i\sqrt{2}$

ومن اجل $y=-\sqrt{2}$ النقطة الثانية لاحقتها $z''=\sqrt{2}+1-i\sqrt{2}$

4. ليكن **S** التشابه المباشر الذي مركزه **C** ويحول **A** إلى **B**

0.5 أ — العبارة المركبة للتشابه **S** هي :

لدينا $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}=\frac{-1+2i+1+2i}{1+1+2i}=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

ومنه $(z_B-z_C)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A-z_C)$ التشابه **S** نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

ب — تعيّن (E') صورة (E) بالتشابه **S**.

لدينا مركز (E) هو **A** *وبالتالي صورته هي* **B** *مركز* (E')

وبما ان النسبة هي $\sqrt{2}$ فان نصف قطر (E') هو $r'=\sqrt{2}r-=2\sqrt{2}$

ومنه $(E'):(x+1)^2+(y-2)^2=8$

التمرين رقم 2 الحل

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نعتبر النقط: $A(2;1;3)$، $B(-3;-1;7)$، $C(3;2;4)$.

1) النقط **A**، **B** و **C** ليست في استقامة لان $\overrightarrow{BC}(6;3;-3)$ و $\overrightarrow{AC}(1;1;1)$ غير مرتبطان خطيا اي $\frac{6}{1}\neq\frac{3}{1}\neq-\frac{3}{1}$

2) ليكن (Δ) مستقيم تمثيله الوسيطي $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases}x=-7+2t\\ y=-3t\\ z=4+t\end{cases}$ ومنه

شعاع توجيهه هو $\vec{u}(2;-3;1)$

أ. (Δ)عمودي على المستوي (ABC) لأن $\vec{u}.\overrightarrow{BC}=0$ 0.5

و $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=0$ اي ان $12-9-3=0$ و كذلك $2-3+1=0$

ب — معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) الذي شعاعه الناظمي هو $\vec{n}(2;-3;1)$ ويشمل $A(2;1;3)$

هي : $2x-3y+z+d=0$ ومن اجل $A\in(ABC)$ فان $d=-4$

نجد $(ABC):2x-3y+z-4=0$

3) لتكن H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (ABC) أي $H(-5;-3;5)$

أ — اثبات أنّ H مرجح الجملة $\{(A;-2);(B;-1);(C;2)\}$ 0.5

بما ان مجموع المعاملات يساوي **1−** غير معدوم المرجح موجود ومنه

ومنه $x_H=(-2\times2-1\times(-3)+2\times3)/-1=5$ و

$y_H=(-2\times1-1\times(-1)+2\times2)/-1=-3$

و $z_H=(-2\times3-1\times7+2\times4)/-1=5$ ومنه $H(-5;-3;5)$

ب — طبيعة المجموعة (p) مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق : 0.5

$$(-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})=0$$

لدينا H مرجح الجملة $\{(A;-2);(B;-1);(C;2)\}$ ومنه

$$-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}$$



ولدينا $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ يعني ان M مستقلة عن B و C ومنه

$\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BC}$

المجموعة تكافئ $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{BC}=0$ هي مستوي يشمل H وناظمه

$\overrightarrow{BC}(6;3;-3)$

معادلتها الديكارتية هي $6x+3y-3z+54=0$ ومنه بقسمة على 3

نجد $2x+y-z+18=0$

0.5 ج. المجموعة (S) مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق

$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=\sqrt{29}$:

لدينا H مرجح الجملة $\{(A;-2);(B;-1);(C;2)\}$ ومنه

$-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MH}$ بوضع الطويلة نجد

$\left\|-2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|=MH$ ومنه $MH=\sqrt{29}$

المجموعة (S) مجموعة النقط من الفضاء هي سطح كرة مركزها

H ونصف قطرها $r=\sqrt{29}$:

0.5 د. بين ان تقاطع المجموعتين (p) و (S) هو دائرة (C) لا يطلب تحديد عناصرها

نقوم بحساب البعد بين مركز (S) و المستوى (p) نجد

$$d((p),E)=\frac{|2(-5)-3(-3)+5-4|}{\sqrt{4+9+1}}=0$$

ومنه بما ان $d<r$ (S) تقاطع (S) و المستوى (p) هو دائرة

0.5 بما ان $S\in(S)$ لان $\overrightarrow{HS}(-3;4;-2)$ ومنه $HS=\sqrt{29}$ يساوي نصف القطر او يمكن تعويض S في معادلة (S)

و $S\in(p)$ لان $2(-8)+1-3+18=0$ نستنتج ان S تنتمي الى (C)

التمرين رقم 3 الحل

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب $u_1=\sqrt{e}$ و

$$u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$$

01 **1)** احسب u_4,u_3,u_2 (تدور النتائج الى 10^{-2})

$u_{1+1}=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}+1$ ومنه $u_2=\frac{2}{3}\sqrt{e}+\frac{1}{3}+1$ ومنه $u_2=2.43$

$u_{2+1}=\frac{2}{3}u_2+\frac{1}{3}2+1$ ومنه $u_2=\frac{2}{3}(2.43)+\frac{2}{3}+1$ ومنه $u_3=3.29$

$u_{3+1}=\frac{2}{3}u_3+1+1$ ومنه $u_2=\frac{2}{3}(3.29)+\frac{1}{3}+1$ ومنه $u_4=4.19$

01 المتتالية (u_n) متزايدة

2) أ) برهن بالتراجع ان من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ان : $u_n\le n+3$

من اجل $n=1$ فان $\sqrt{e}<3$ ومنه $p(1)$ صحيحة لان $u_1\le 3$

بفرض الخاصية $p(n)$ صحيحة من اجل n أي $u_n\le n+3$ ولنفرض صحة الخاصية $p(n+1)$ من اجل أي ان $n+1$ أي ان $u_{n+1}\le n+4$

البرهان : نعلم ان $u_n\le n+3$ بالضرب في 2/3 واضافة $\frac{1}{3}n+1$ نجد

$\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\le n+4$ ومنه الخاصية $p(n+1)$ صحيحة اذن

$u_n\le n+3$

0.5 ب) اثبات ان من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ ان: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

لدينا $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n$ ومنه

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_{nn}=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$$

0.5 ج) استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

بما ان $u_n\le n+3$ فان $\frac{1}{3}(n+3-u_n)>0$ ومنه $u_{n+1}-u_n>0$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب $v_n=u_n-n$

ا) بيان أن (v_n) متتالية هندسية اساسها $q=\frac{2}{3}$

0.5 (v_n) متتالية هندسية يعني ان $v_{n+1}=v_n.q$ لدينا $v_{n+1}=u_{n+1}-n-1$

ومنه $v_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n-1=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n$

ومنه $v_{n+1}=\frac{2}{3}(u_n-n)$ تصبح صيغة متتالية هندسية اساسها $q=\frac{2}{3}$

حدها الاول $v_1=u_1-1$ ومنه $v_1=\sqrt{e}-1$

وحدها العام هو $v_n=\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

0.5 ب)بيان ان من اجل كل $n\ge 1$ ان : $u_n=n+\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

لدينا $v_n=u_n-n$ ومنه $u_n=v_n+n$ ومنه

$$u_n=n+\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

4) من اجل كل $n\ge 1$ نضع : $S_n=V_1+V_2+......+v_n$ و

$S'_n=u_1+u_2+......+u_n$

ا) حساب المجموع S_n :

المتتالية (v_n) هندسية ومنه $S_n=V_1\frac{1-(2/3)^n}{1-2/3}$ n هو عدد الحدود

ومنه $S_n=3\left(\sqrt{e}-1\right)\left(1-(2/3)^n\right)$

حساب S'_n لدينا المتتالية (u_n) ليست حسابية ولا هندسية ومنه بما ان $u_n = v_n + n$ فان $S'_n = u_1+u_2+......+u_n$ يصبح

اي $S'_n = v_1+1+v_2+2+......+v_n+n$

$S'_n = \frac{n(n+1)}{2}+(v_1+v_2+......+v_n)$ ومنه $S'_n = \frac{n^2+n}{2}+S_n$

اي $S'_n = \frac{n^2+n}{2}+3\left(\sqrt{e}-1\right)\left(1-(2/3)^n\right)$

0.25

النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S'_n}{n^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} S'_n = \frac{n^2+n}{2n^2}+\frac{3}{n^2}\left(\sqrt{e}-1\right)\left(1-(2/3)^n\right)$

0.25

وبالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S'_n}{n^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}+\frac{3\left(\sqrt{e}-1\right)\left(1-\lim\limits_{x\to+\infty}(2/3)^n\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} n^2}$

بما ان $\lim\limits_{x\to+\infty}(2/3)^n = 0$ فان $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S'_n}{n^2} = \frac{1}{2}$

0.25

التمرين رقم 4 الحل

الحل : جزء1 :

1) g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x)=1+4xe^{2x}$

1) نهاية الدالة g عند $+\infty$ و عند $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+4xe^{2x} = +\infty$ و

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1+4\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} = 1$ لان $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{2x} = 0$

0.5

2) حساب $g'(x)$ ثم عين اشارتها واستنتج اتجاه تغير الدالة g

المشتقة : الدالة g تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة :

$g'(x) = 4e^{2x}+8xe^{2x} = (4+8x)e^{2x} = 4(1+2x)e^{2x}$

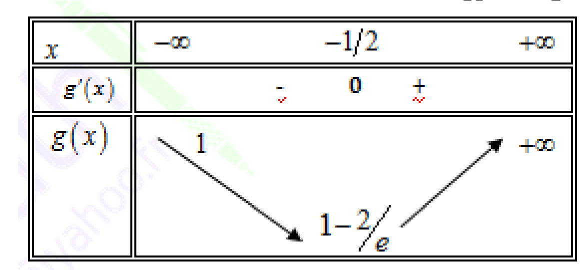
اشارة المشتقة من اشارة $1+2x$ ومنه $1+2x=0$ يعني ان $x=-1/2$

g' موجبة تماما على $]-1/2;+\infty[$ ومنه الدالة g متزايدة g'

سالبة تماما على $]-\infty;-1/2[$ ومنه الدالة g متناقصة

جدول التغيرات

0.5



x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	1 ↘	$1-2/e$	↗ $+\infty$

3) نلاحظ ان $g(-1/2)=1-2/e$ هي قيمة حدية صغرى للدالة g

0.5

4) استنتاج اشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$ بمان $g(-1/2)>0$

فان $g(x)>0$ على المجال $\mathbb{R}$ من خلال الجدول

الحل : جزء2 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$

يمكن كذلك كتابتها اما بـ : $f(x)=\frac{1}{x}(x-5)\ln x$ او

$f(x)=\ln x-\frac{5\ln x}{x}$

1) ا) النهاية

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x}+\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$

ب) النهاية

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2xe^{2x}\right)-\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}+\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$

لان $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2xe^{2x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} -\left(2\frac{x}{e^{2x}}\right) = 0$

2) ا) بيان أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

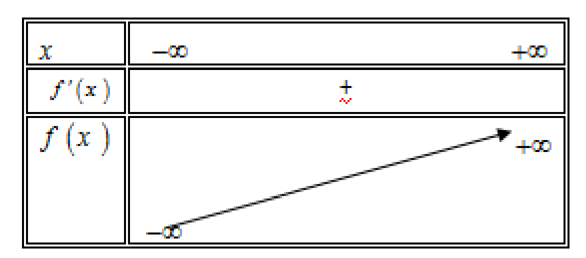
المشتقة : الدالة f تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة :

$f'(x) = 2e^{2x}+2(2x-1)e^{2x}+1$

$= e^{2x}(2+4x-2)+1 = 4xe^{2x}+1 = g(x)$

اشارة المشتقة من اشارة $g(x)$ ومنه f متزايدة على $\mathbb{R}$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .



x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm;\|\vec{j}\|=2cm$

التمثيل البياني للدالة f في هذا المعلم (C_f)

ا) معادلة المستقيم $(\Delta): y=x+1$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{2x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left(2xe^{2x}\right)-\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

ومنه $(\Delta): y=x+1$ هو مقارب مائل بجوار $-\infty$

ب) الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f)

لدينا $f(x)-y=(2x-1)e^{2x}$ ومنه

$f(x)-y=(2x-1)e^{2x}=0$ يعني ان $x=\frac{1}{2}$

لما $x=\frac{1}{2}$ (Δ) و (C_f) يتقاطعان

لما $x\in\left]1/2;+\infty\right[$ (Δ) يقع تحت (C_f)

لما $x\in\left]-\infty;1/2\right[$ (Δ) يقع فوق (C_f)

0.25

3) ا) معادلة المماس (T) مماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 لدينا $y=f(o)+(x)f'(0)$ ومنه

$y=0+(x).(1)$ اذن $(T):y=x$

01

ب) المنحني يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $-\frac{1}{2}$

0.5

لدينا المشتقة : الدالة f' تقبل الاشتقاق ودالتها المشتقة :

$$f''(x)=4(1+2x)e^{2x}$$

اشارة المشتقة من اشارة $1+2x$ ومنه f'' موجبة تماما على $\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$ و f'' سالبة تماما على $\left]-\infty;\frac{-1}{2}\right[$

اذن نقطة الانعطاف فاصلتها $-\frac{1}{2}$ احداثيها $\left(-\frac{1}{2};f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

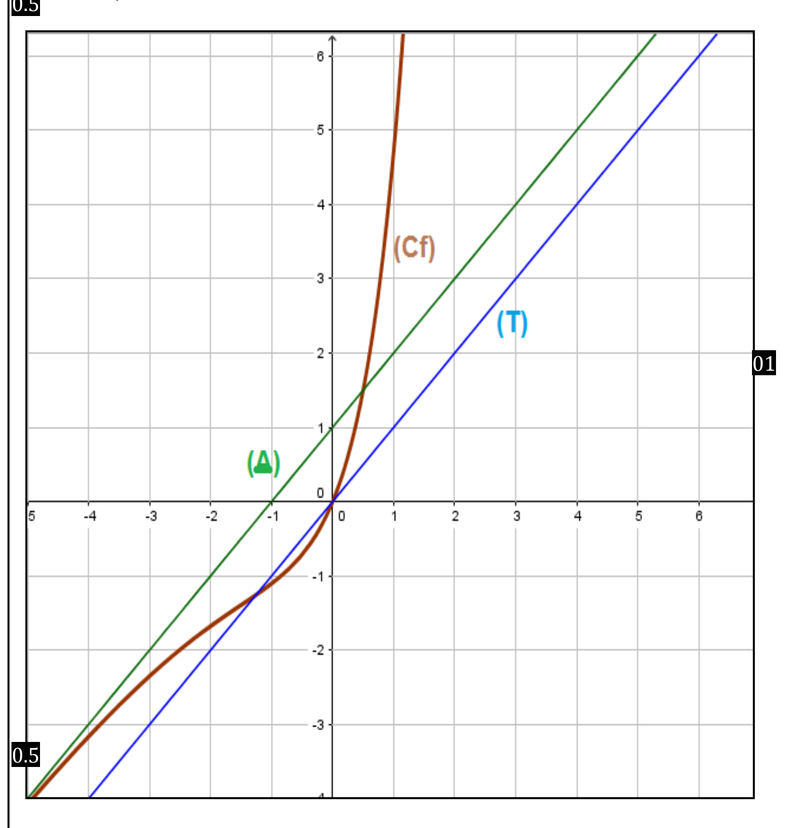
اي $\left(-\frac{1}{2};\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{e}\right)\right)$

ج) $f(0)=0$ المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل ومحور التراتيب في النقطة $(0;0)$ او يمر بالمبدا

0.5

د) انشئ كل من المستقيم (Δ) و المماس (T) و المنحنى (C_f)

0.5



01

0.5

الحل : جزء3 :

1) ا) $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}\text{dx}$ بوضع

$$\begin{cases}u(x)=(2x-1);v'(x)=e^{2x}\\ u'(x)=2 \quad ;v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}$$

ومنه

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}\text{dx}=\left[\frac{(2x-1)}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{2x}\text{dx}$$

$$=\left[\frac{(2x-1)}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

ومنه

$$\left[\frac{(2x-1)}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}=1-\frac{e}{2}$$

حساب مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=\frac{1}{2}$ و $x=0$ و $(T):y=x$

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}}[f(x)-y]\text{dx}=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(2x-1)e^{2x}+1\right]\text{dx}$$

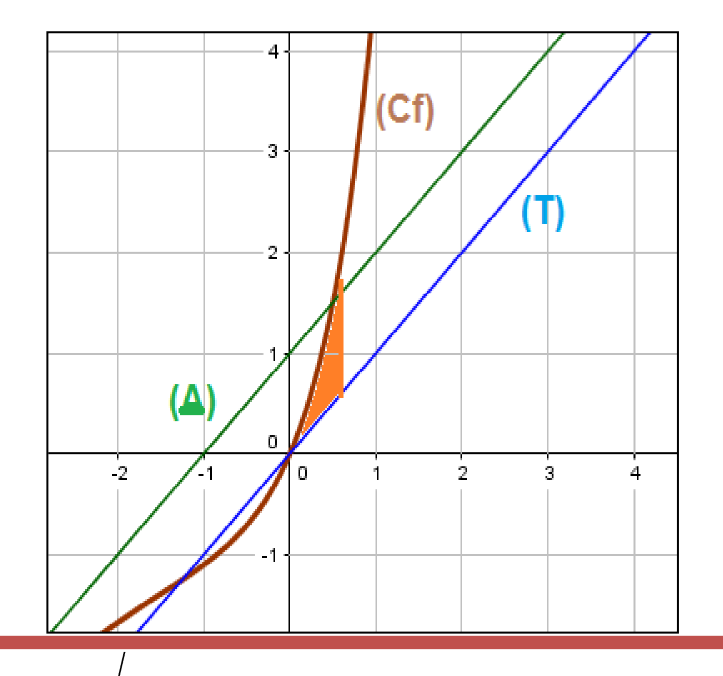
لدينا

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(2x-1)e^{2x}\right]\text{dx}+\int_0^{\frac{1}{2}}\text{dx}$$

$$A=\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(2x-1)e^{2x}\right]\text{dx}+[x]_0^{\frac{1}{2}}$$

ومنه

$$A=\left(1-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}\right)\times 2cm\times 2cm=(6-2e)cm^2$$



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأوّل: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $11x-5y=2$

1) أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن: $y\equiv 4[11]$

ب) استنتج حلول المعادلة (E) .

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . نضع: $a=5n+2$ و $b=11n+4$

أ)عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

ب)عين قيم n بحيث يكون $PGCD(a,b)=2$

ج)استنتج قيم n بحيث يكون العددان a و b أوليين فيما بينهما .

3) أ) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 10

ب) استنتج رقم أحاد العدد 2^{2016}

ج) عين كل الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق: $2^y-2x\equiv 8[10]$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

نعتبر المكعب $ABCDEFGH$ طول ضلعه 1 , I منتصف القطعة $[EF]$ و J نظيرة النقطة E بالنسبة للنقطة F

ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$

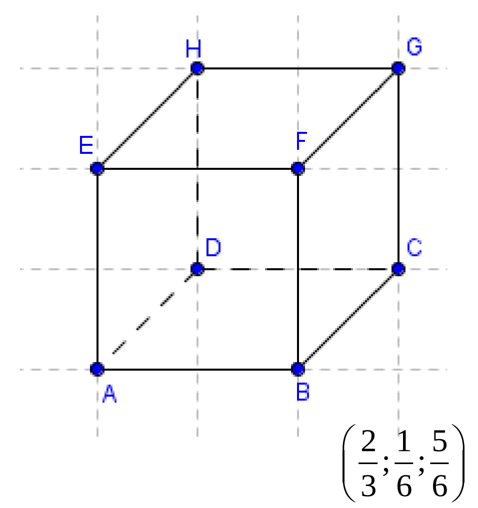


1) أ) عين إحداثيات النقطتين I و J

ب) تحقق أن الشعاع $\overrightarrow{DJ}$ ناظمي على المستوي (BGI)

جـ) استنتج المعادلة الديكارتية للمستوي (BGI)

د) أحسب المسافة بين F و المستوي (BGI)



2) نضع المستقيم (Δ) المار من F و العمودي على المستوي (BGI)

أ) أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)

ب) بين أن المستقيم (Δ) يشمل النقطة K مركز الوجه $ADHE$

جـ) بين أن المستقيم (Δ) و المستوي (BGI) يتقاطعان في النقطة P إحداثياتها $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$

د) هل النقطة P هي نقطة تقاطع إرتفاعات المثلث BGI ؟علّل إجابتك.

3) عين معادلة سطح الكرة (S) الموجودة داخل المكعب $ABCDEFGH$ والتي تمس أوجهه الستة .

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) نعتبر النقط A,B,C ذات اللواحق: $Z_A=2, Z_B=3+i\sqrt{3}, Z_C=i\,2\sqrt{3}$

أ) عين قيسا بالراديان للزاوية ABC .

ب) استنتج أن النقطة W ذات اللاحقة $Z_W=1+i\sqrt{3}$ هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

2) نعتبر التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' لاحقتها Z' حيث : $Z'=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}Z+2$

- عين طبيعة التحويل T ، مبينا عناصره المميزة .

3) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن W لاحقتها Z_n, نضع $M_0=O$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$M_{n+1}=T\left(M_n\right)$$

أ) بين أن النقط M_2, M_3 و M_4 لواحقها على الترتيب هي : $Z_2=3+i\sqrt{3}, Z_3=2+i\,2\sqrt{3}$ و $Z_4=i\,2\sqrt{3}$

(يمكن ملاحظة أن $M_1=A$ و $M_2=B$ و $M_4=C$).

ب) قارن بين الأطوال M_1M_2 و M_2M_3 و M_3M_4 .

ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $M_{n+6}=M_n$ ثم عين لاحقة النقطة M_{2016}

د) أحسب من أجل كل عدد طبيعي n طول القطعة المستقيمة $\left[M_nM_{n+1}\right]$

التمرين الرابع :(07نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $I=]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+1+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ، $\left(\|\vec{i}\|=2cm\ ,\|\vec{j}\|=1\,cm\right)$

I) g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=-\left[2\left(x\sqrt{x}-1\right)+\ln x\right]$

1) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في الحالتين $0<x<1$ و $x>1$.

2) احسب نهايتي الدالة f عند 0 , $+\infty$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) .

3) احسب $f'(x)$ واستنتج أن إشارتها من نفس إشارة الدالة g

4) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

5) أرسم (C_f) والمستقيمين المقاربين

II) 1. باستعمال تكامل التجزئة ، عين دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1) احسب $S(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y=-x+1$, $x=1$, $x=\alpha$
بحيث $0<\alpha<1$

2) احسب نهاية $S(\alpha)$ لما يؤول α إلى الصفر ، أعط تفسيرا بيانيا لهذه النهاية

III) (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول u_0 حيث : $u_0\in[1;2]$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}=\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1$

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;2]$ لدينا : $0\le\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\le 1$

2) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n\in[1;2]$

3) بملاحظة أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}=f(u_n)+u_n$ ، عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4) برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة ، نسمي العدد l نهايتها

5) احسب بدقة قيمة l .

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل : (04نقاط)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ (الوحدة $2cm$)

– نذكر من أجل كل عددين مركبين a و b لدينا : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^3=8$

2) نعتبر A ، B و C ثلاث نقط من المستوي لواحقها على الترتيب a ، b و c حيث:

$$a=2 \quad ، \quad b=-1+i\sqrt{3} \quad ، \quad c=-1-i\sqrt{3}$$

نسمي r دوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ و r' دوران مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

نضع $B'=r'(B)$ و $C'=r(C)$ نرمز بالعددين b' و c' إلى لاحقتي النقطتين B' و C' على الترتيب .

أ) مثل النقط A ، B و C في المعلم $(O;\vec{u},\vec{v})$.

ب) أثبت أن $b'=2+\sqrt{3}+3i$ ،وأن العددان b' و c' مترافقان.

3) نسمي النقط M ، N ، P و Q منتصفات القطع $[CB]$ ، $[BB']$ ، $[B'C']$ و $[C'C]$ ونرمز بالأعداد m ، n ، p و q الى لواحقها

أ) أثبت أن اللاحقة n للنقطة N تساوي $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ ثم استنتج أن النقط O ، N و C على استقامة واحدة.

ب) أثبت أن $n+1=i(q+1)$ ثم استنتج طبيعة المثلث MNQ .

ج) أثبت أن الرباعي $MNPQ$ مربع .

التمرين الثاني : (04.5نقاط)

1) أ) عين الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة (E) : $8x-5y=3$

ب) ليكن m عدد صحيح بحيث يوجد عددان صحيحان $(p;q)$ يحققان : $m=8p+1$ و $m=5q+4$

– بين أن الثنائية $(p;q)$ حل للمعادلة (E) و استنتج أن $m\equiv 9[40]$

ج) عين أصغر عدد صحيح m أكبر من 200

2) ليكن n عدد طبيعي

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k لدينا $2^{3k}\equiv 1[7]$

ب) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2016} على 7 .

3) ليكن a و b عددان طبيعيان كلاهما أصغر من 9 مع $a\neq 0$

نعتبر العدد N حيث : $N=a\times 10^3+b$

نذكر أن العدد N يكتب في النظام العشري : $N=\overline{a00b}^{10}$

4) نريد تعيين الأعداد الطبيعية N التي تقبل القسمة على 7

– تحقق أن $10^3\equiv -1[7]$ ثم استنتج كل الأعداد المطلوبة N .

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

1) في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A\,(1;1;1)$, $B\,(1;0;2)$, $C\,(1;2;0)$ و $D\,(-1;0;3)$ والمجموعة (Γ) لنقط الفضاء $M\,(x;y;z)$ التي تحقق المعادلة : $x^2-2(x+y+z-yz)+3=0$

أ) بين أن النقط A,B و C تقع على استقامة واحدة .

ب) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) المار بالنقط A,B و C .

جـ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) المار بالنقطة D والعمودي على (Δ).

د) أحسب إحداثيات المسقط العمودي D' للنقطة D على المستقيم (Δ).

2) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة كيفية من مجموعة النقط (Γ) ، ولتكن النقطة $M'(x';y';z')$ نظيرة M بالنسبة للمستقيم (Δ)

أ) بين أنّ إحداثيات النقطة M' تحقق $\begin{cases} x' = 2-x \\ y' = 2-z \\ z' = 2-y \end{cases}$ ثم استنتج أنّ النقطة M' تنتمي أيضا إلى مجموعة النقط (Γ)

ب) برهن أنه مهما تكن النقطة M من المجموعة (Γ) فإن الشعاعين $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AM'}$ متعامدين .

جـ) بين أن كل نقطة من المستقيم (AM) تنتمي إلى المجموعة (Γ) .

د) برهن أن مجموعة النقط المشتركة بين المجموعة (Γ) والمستوي (P) هي دائرة مركزها D' يطلب تحديد نصف قطرها .

التمرين الرابع : (07نقاط)

I) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\| = 2cm$

1)أ) تحقق من أن $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب) استنتج أن الدالة f فردية ثم أحسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

2) أ)بين انه من اجل كل عدد حقيقي x فان : $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

جـ) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ فان : $1 - \frac{2}{e^x+1} \le \frac{1}{2}x$

3)أ) أحسب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - 1 + \frac{1}{2}x\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا آخر (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته

4) أرسم المستقيم (d) ذو المعادلة $y = 1 - \frac{1}{2}x$ و المستقيم (Δ) ثم أنشئ المنحنى (C_f)

5) ليكن λ عددا حقيقيا موجبا تماما

أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون : $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

ب) أحسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المستوي $A(\lambda)$ المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين ذو المعادلتين :

$x = 0$ و $x = \lambda$ ، ثم أحسب $A(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $+\infty$

II) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأوّل $u_0 = 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n}+1}$.

1) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n > 0$

2) أ) تحقق ، باستعمال نتيجة السؤال 3.جـ) ، من أنّ : $u_{n+1} \le \frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة . ماذا يمكن القول عن تقاربها ؟

3) بين انه من كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty} u_n$

الموضوع الاول

التمرين الاول نعتبر المعادلة (E) حيث : $11x-5y=2$

1)أ) لتكن الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) اذن $5y\equiv -2[11]$

ومنه $5y\equiv 9[11]$ ينتج $5y\equiv 9[11]$ ينتج $45y\equiv 81[11]$

وبالتالي $y\equiv 4[11]$ لان $45\equiv 1[11]$ و $81\equiv 4[11]$

ب) استنتج حلول المعادلة (E) .

لدينا $y\equiv 4[11]$ ومنه $y=11k+4$ وبالتعويض في (E)

نجد الحلول هي الثنائيات $(5k+2;11k+4)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم . نضع : $a=5n+2$ و $b=11n+4$

أ)تعيين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

لدينا a و b حلين للمعادلة (E) وليكن d قاسما مشتركا للعددين a و b ،

اذن $d/11a-5b$ وبالتالي $d/2$ اذن $d\in\{1;2\}$

ب)تعيين قيم n بحيث يكون $PGCD(a,b)=2$

لدينا $2/a$ و $2/b$ أي $2/5n+2$ و $2/11n+4$ومنه $\begin{cases}2/11n+4\\2/10n+4\end{cases}$

اذن $2/n$ ومنه $n=2k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$

ج)استنتاج قيم n بحيث يكون العددان a و bأوليين فيما بينهما .

قيم n التي تجعل $(a,b)=1$ هي كل الأعداد الطبيعية ماعدا التي من اجلها

يكون $(a,b)=2$ ومنه قيم n التي تجعل $(a,b)=1$ هي الاعداد الفردية

أي $n=2k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$

3) أ) دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^n على 10 $(n\neq 0)$

لدينا: $2^1\equiv 2[10]$ ، $2^2\equiv 4[10]$ ، $2^3\equiv 8[10]$ ، $2^4\equiv 6[10]$

$2^5\equiv 2[10]$ ، $2^6\equiv 4[10]$ ومنه الدور هو 4 ويكون من اجل كل k من $\mathbb{N}$

$2^{4k+1}\equiv 2[10]$ ، $2^{4k+2}\equiv 4[10]$ ، $2^{4k+3}\equiv 8[10]$ ، $2^{4k+4}\equiv 6[10]$

ب) استنتاج رقم أحاد العدد 2^{2016}

رقم أحاد العدد 2^{2016} هو نفسه باقي قسمة 2^{2016} على 10 وبما ان

$2016=4\times 503+4$ **فان** $2^{2016}\equiv 6[10]$ **اذن رقم احاده هو 6**

ج)تعيين كل الثنائيات (x,y) من التي هي حلول (E) وتحقق : $2^{y}-2^{x}\equiv 8[10]$

$(x;y)$ حلول (E) معناه $x=5k+2$ و $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{N}$

اذن $2^{y}-2^{x}\equiv 8[10]$ تكافئ $2^{k}\equiv 8[10]$ معناه $k=4k'+3$ مع $k'\in\mathbb{N}$

ومنه الثنائيات المطلوبة هي $(20k'+17;44k'+37)$ حيث $k'\in\mathbb{N}$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط) $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 1 ,

1) أ) عين إحداثيات النقطتين I و J

لدينا : $A(0;0;0)$ ، $B(1;0;0)$ ، $G(1;1;1)$ ، $D(0,1;0)$ ، $E(0;0;1)$

I **منتصف** $[EF]$ **اذن** $I\left(\frac{1}{2};0;1\right)$ **و** J **نظيرة** E **بالنسبة الى** F **اذن :** $J(2;0;1)$

ب) تحقق أن الشعاع $\overrightarrow{DJ}$ ناظمي على المستوي (BGI)

$\overrightarrow{DJ}$ **ناظمي** (BGI) **معناه** $\overrightarrow{DJ}$ **عمودي على شعايعين غير مرتبطين خطيا**

من المستوي (BGI) **أي يكفي التاكد ان :** $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$ **و** $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$

لدينا $\overrightarrow{DJ}(2;-1;1)$ **و** $\overrightarrow{BG}(0;1;1)$ **و** $\overrightarrow{BI}\left(\frac{-1}{2};0;1\right)$ **فيكون :**

$\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG}=0-1+1=0$ و $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI}=-1+0+1=0$

اذن $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$ و $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$ ومنه $\overrightarrow{DJ}$ناظمي على (BGI)

ج) استنتاج المعادلة الديكارتية للمستوي (BGI)

لدينا $\overrightarrow{DJ}$ناظمي على (BGI) فان معادلته هي : $2x-y+z+d=0$

وبما ان $B\in(BGI)$ فان $2+d=0$ أي $d=-2$ وبالتالي

$$(BGI):2x-y+z-2=0$$

د) حساب المسافة بين F و المستوي (BGI) حيث $F(1;0;1)$

$$d(F;(BGI))=\frac{|2-0+1-2|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$$

2) (Δ) مستقيم يشمل F و عمودي على المستوي (BGI)

أ) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)

بما ان $(\Delta)\perp(BGI)$ فان $\overrightarrow{DJ}$ شعاع توجيه (Δ) اذن (Δ) له

تمثيل وسيطي من الشكل : $\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=1+t\end{cases},t\in\mathbb{R}$

ب) اثبات أن المستقيم (Δ) يشمل النقطة K مركز الوجه $ADHE$

مركز الوجه $ADHE$ هي نقطة منتصف القطرين $[AH]$ و $[DE]$

ومنه احداثيات K هي $K\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ لان $H(0;1;1)$

لنتاكد ان $K\in(\Delta)$ هذا معناه : $\begin{cases}0=1+2t\\\frac{1}{2}=-t\\\frac{1}{2}=1+t\end{cases}$

ومنه الجملة تقبل حل وحيد $t=-0.5$ ينتج ان $K\in(\Delta)$

ج) اثبات أن (Δ) والمستوي (BGI) يتقاطعان في النقطة $P\left(\frac{2}{3};\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$

لدينا $(BGI)\perp(\Delta)$ اذن يتقاطعان في نقطة هي المسقط العمودي للنقطة

F على (BGI) ومنه يكفي التاكد ان $P\in(BGI)$ و $\overrightarrow{FP}//\overrightarrow{DJ}$

بما ان $2\times\frac{2}{3}-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}-2=\frac{8-1+5-12}{6}=0$ فان $P\in(BGI)$

ولدينا $\overrightarrow{FP}(\frac{-1}{3};\frac{1}{6};\frac{-1}{6})$ فيكون $\overrightarrow{DJ}=-6\overrightarrow{FP}$ اذن $\overrightarrow{FP}//\overrightarrow{DJ}$

د) هل النقطة P هي نقطة تقاطع إرتفاعات المثلث BGI ؟

P هي نقطة تقاطع إرتفاعات المثلث BGI معناه $\overrightarrow{PG}\perp\overrightarrow{BI}$ و

$\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{GI}$ و $\overrightarrow{PI}\perp\overrightarrow{BG}$

لدينا : $\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{BI}=\left(\frac{1}{3};\frac{5}{6};\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2};0;1\right)=\frac{-1}{6}+0+\frac{1}{6}=0$

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{GI}=\left(\frac{1}{3};\frac{-1}{6};\frac{-5}{6}\right)\cdot\left(\frac{-1}{2};-1;0\right)=\frac{-1}{6}+\frac{1}{6}+0=0$$

$$\overrightarrow{PI}\cdot\overrightarrow{BG}=\left(\frac{-1}{6};\frac{-1}{6};\frac{1}{6}\right)\cdot(0;1;1)=0+\frac{-1}{6}+\frac{1}{6}=0$$

ومنه P هي نقطة تقاطع إرتفاعات المثلث BGI

3)تعيين معادلة سطح الكرة (S) الموجودة داخل المكعب و تمس أوجهه

مركز (S) هي Ω **نقطة تقاطع الضلعين $[AG]$ و $[BH]$**

اذن $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ **ونصف قطرها هو** $r=\frac{1}{2}$

فتكون معادلة سطح الكرة (S) من الشكل :

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

$$Z_C = i\,2\sqrt{3},\quad Z_B = 3+i\sqrt{3},\quad Z_A = 2$$

1) أ) تعيين قيسا بالراديان للزاوية ABC .

لدينا $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{-3+\sqrt{3}i} = \dfrac{4\sqrt{3}i}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ **ومنه**

$\arg\left(\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ **وبالتالي** $ABC = \dfrac{\pi}{2}$

ب) استنتج لاحقة مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

بما ان المثلث ABC قائم في B فان مركز الدائرة المحيطة به هي منتصف القطر $[AC]$ أي $z_W = \dfrac{z_A + z_C}{2} = \dfrac{2+i\,2\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$

2) نعتبر التحويل النقطي T : $Z' = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}Z + 2$

تعيين طبيعة التحويل T

لدينا $a = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ و $|a| = 1$ فان T دوران زاويته هي θ حيث

$\theta = \arg(a) = \dfrac{\pi}{3}$ ومركزه هو النقطة ذات اللاحقة :

$z_0 = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{2}{\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{4}{1-i\sqrt{3}} = 1+i\sqrt{3}$ أي مركزه هو W

3) n **عدد طبيعي** Z_n**, نضع** $M_0 = O$ و $M_{n+1} = T(M_n)$

أ) حساب لواحق النقط M_2, M_3 و M_4 :

لدينا $M_1 = T(M_0)$ **و منه** $z_1 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\times 0 + 2 = 2 = z_A$

$M_2 = T(M_1)$ **و منه** $z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\times 2 + 2 = 3+i\sqrt{3}$

$M_3 = T(M_2)$ **و منه** $z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\times(3+i\sqrt{3}) + 2 = 2+i\,2\sqrt{3}$

$M_4 = T(M_3)$ **و منه** $z_4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\times(2+i\,2\sqrt{3}) + 2 = i\,2\sqrt{3}$

ب) المقارنة بين الأطوال M_1M_2 و M_2M_3 و M_3M_4 .

$M_1M_2 = |z_2 - z_1| = |1+i\sqrt{3}| = 2$ ، $M_2M_3 = |z_3 - z_2| = |-1+i\sqrt{3}| = 2$

$M_3M_4 = |z_4 - z_3| = |-2| = 2$ ومنه $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4$

ج)اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n **:** $M_{n+6} = M_n$

لنبين ذلك بالتراجع ، من اجل $n = 0$ ، لدينا $M_5 = T(M_4)$

اذن $z_5 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\times i\,2\sqrt{3} + 2 = -1+i\sqrt{3}$

$z_6 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\times(-1+i\sqrt{3}) + 2 = -2+2 = 0$

أي ان $M_{6+0} = M_0$ ومنه الخاصية صحيحة من اجل $n = 0$

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$

أي نبرهن ان $M_{n+7} = M_{n+1}$

لدينا $M_{n+6} = M_n$ اذن $T(M_{n+6}) = T(M_n)$ ينتج $M_{n+7} = M_{n+1}$

اذن الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ اذن حسب مبدا البرهان بالتراجع الخاصية صحيحة أي من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $M_{n+6} = M_n$

د) حساب من أجل كل عدد طبيعي n **طول القطعة المستقيمة** $[M_nM_{n+1}]$

لدينا : $M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = 2$

لنبين بالتراجع ان $M_nM_{n+1} = 2$

من اجل $n = 0$ ، لدينا $M_1M_0 = 2$ ومنه الخاصية صحيحة

نفرض ان الخاصية صحيحة من اجل n ونبرهن صحتها من اجل $n+1$

أي نبرهن ان $M_{n+1}M_{n+2} = 2$

لدينا $M_nM_{n+1} = 2$ اذن $T([M_nM_{n+1}]) = [M_{n+1}M_{n+2}]$ وبما ان T دوران فهو تقايس اذن $M_{n+1}M_{n+2} = M_nM_{n+1} = 2$ ،ومنه الخاصية صحيحة من اجل $n+1$ ا ذن حسب مبدا البرهان بالتراجع الخاصة صحيحة أي من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $M_nM_{n+1} = 2$

التمرين الرابع :(07نقاط)

f معرفة على $I =]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = -x + 1 + \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(I $g(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x\right]$

1)حساب $g(1)$ **ثم استنتج إشارة** $g(x)$

$g(1) = 0$ ، ولدينا من اجل $0 < x < 1$ فان $\ln x < 0$ و

$x\sqrt{x} - 1 < 0$ اذن $\left[\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x\right] < 0$ ومنه $g(x) > 0$

من اجل $x > 1$ فان $\ln x > 0$ و $x\sqrt{x} - 1 > 0$ اذن

$\left[\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x\right] > 0$ ومنه ينتج ان $g(x) < 0$

2)حساب نهايتي الدالة f **عند** $+\infty$ **وعند** 0

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x + 1 + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{y\to+\infty}\left(-y^2 + 1 + \frac{2\ln y}{y}\right) = -\infty$$

بما ان $f(x) = -x + 1 + Q(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty} Q(x) = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

فان المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-x + 1 + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = -\infty$$

اذن $x = 0$ هي معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) **موازي لمحور التراتيب**

3)حساب $f'(x)$: f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{x\sqrt{x}} - \ln x \cdot \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-2x\sqrt{x} + 2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{-\left[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln(x)\right]}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

ومنه إشارة $f(x)$ من نفس إشارة الدالة g

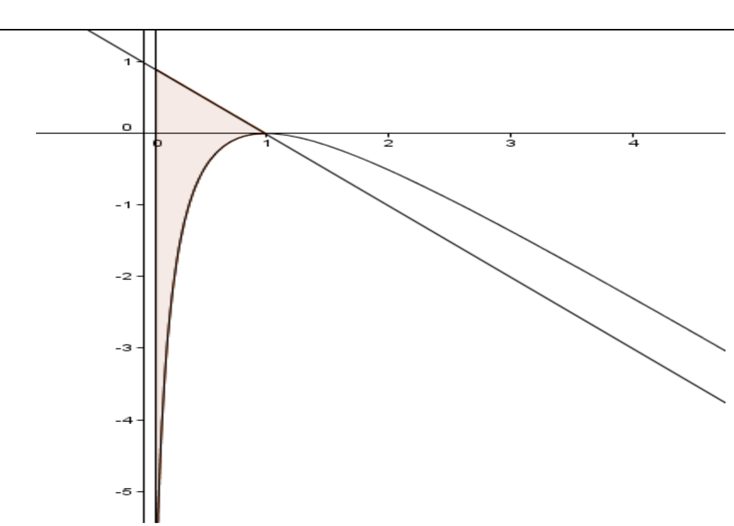
4) اتجاه تغيرات الدالة f **و جدول تغيراتها .**

لدينا على المجال $]0,1]$: $g(x) \geq 0$ ومنه $f'(x) \geq 0$ اذن الدالة f متزايدة تماما على $]0,1]$

وعلى المجال $[1;+\infty[$: $g(x) \leq 0$ ومنه $f'(x) \leq 0$ اذن الدالة f متناقصة تماما على $[1;+\infty[$ وبالتالي جدول تغيرات f هو :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

5)الرسم



II) 1) تعيين دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int \ln x \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\ln x\right] - \int \frac{2\sqrt{x}}{x}dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\ln x\right] - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right]$$

الدالة الاصلية المطلوبة هي $x \mapsto 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$

2) حساب $S(\alpha)$ بحيث $0<\alpha<1$

$$S(\alpha)=\int_\alpha^1 |f(x)-y|dx = -\int_\alpha^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left[-2\sqrt{x}\ln x+4\sqrt{x}\right]_\alpha^1$$

$$= 4+2\sqrt{\alpha}\ln\alpha - 4\sqrt{\alpha}\ (ua)$$

ومنه $S(\alpha)=8+4\sqrt{\alpha}\ln\alpha-8\sqrt{\alpha}\ cm^2$

3) حساب نهاية $S(\alpha)$ لما يؤول α إلى الصفر

$$\lim_{\alpha\to0} S(\alpha)=\lim_{\alpha\to0}(8+\overbrace{4\sqrt{\alpha}\ln\alpha}^{0} - 8\sqrt{\alpha}) = 8cm^2$$

التفسير البياني : نهاية $S(\alpha)$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بكل من (C_f) و المستقيم (d) والمستقيمين ذو المعادلتين : $x=0$ و $x=1$

III) : $u_0\in[1;2]$ و $u_{n+1}=\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1$

1) برهان أنه من أجل كل x من المجال $[1;2]$ لدينا : $0\le \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\le 1$

لدينا من اجل x من المجال فان $0\le\ln x\le\ln(2)\le1 ....(1)$

و ان $1\le\sqrt{x}\le\sqrt{2}$ اي ان $0<\frac{1}{\sqrt2}\le\frac{1}{\sqrt x}\le1 .....(2)$

من (1) و (2) نجد $0\le\frac{\ln x}{\sqrt x}\le 1$

2) برهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n\in[1;2]$

نسمي $P(n)$ الخاصية "$u_n\in[1;2]$"

-لدينا من اجل $n=0$ $u_0\in[1;2]$ ومنه $P(0)$ صحيحة

- نفرض ان $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$ اي نبرهن ان $u_{n+1}\in[1;2]$

لدينا : $u_n\in[1;2]$ اي $1\le u_n\le2$ اذن حسب السؤال السابق $0\le\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}\le1$

ومنه $1\le\frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}}+1\le2$ اي ان $1\le u_{n+1}\le2$ معناه ان $P(n+1)$ صحيحة

اذن حسب مبدا البرهان بالتراجع ان الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

3) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

تحت محور الفواصل) فان $u_{n+1}-u_n\le0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة

4) برهان أن المتتالية (u_n) متقاربة

لدينا من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $1\le u_n\le2$ اي ان (u_n) محدودة من الاسفل

وبما انها متناقصة فانها متقاربة ولتكن ℓ نهايتها

5) حساب نهاية (u_n)

لدينا $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$ اذن بادخال النهاية على العلاقة التراجعية نجد $\ell=\frac{\ln\ell}{\sqrt\ell}+1$ معناه $-\ell+1+\frac{\ln\ell}{\sqrt\ell}=0$ معناه $f(\ell)=0$

ونلاحظ ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا هو 1 (بيانيا) ينتج ان $\ell=1$

الموضوع الثاني

التمرين الأوّل : (04نقاط)

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^3=8$

المعادلة $z^3=8$ تكافئ $z^3-2^3=0$ تكافئ

$$(z-2)(z^2+2z+4)=0$$

معناه $z-2=0$ أو $z^2+2z+4=0$ معناه $z=2$ او

$z^2+2z+4=0$ لدينا $\Delta=4-16=-12=(i2\sqrt3)^2$

ومنه المعادلة تقبل حلين هما $z_1=\frac{-2+i2\sqrt3}{2}=-1+i\sqrt3$

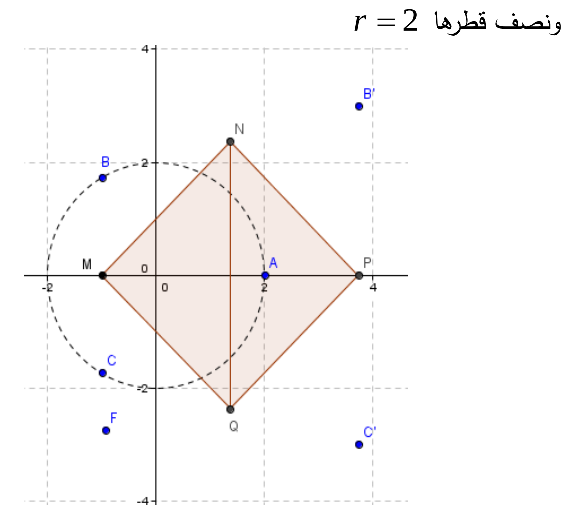
و $z_2=\frac{-2-i2\sqrt3}{2}=-1-i\sqrt3$

اذن مجموعة الحلول هي : $S=\{2;-1+i\sqrt3;-1-i\sqrt3\}$

2) $a=2$ ، $b=-1+i\sqrt3$ ، $c=-1-i\sqrt3$

أ) تمثيل النقط A ، B و C في المعلم $(O;\vec u,\vec v)$

نلاحظ ان النقط A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة مركزها O ونصف قطرها $r=2$



.

ب) اثبات أن $b'=2+\sqrt3+3i$، وأن العددان b' و c' مترافقان.

لدينا $B'=r'(B)$ ومنه $b'-a=-i(b-a)$ اي

$$b'=-i(-1+i\sqrt3-2)+2=2+\sqrt3+3i$$

ولدينا $C'=r(C)$ ومنه $c'-a=i(c-a)$ اي

لدينا $u_{n+1}=f\left(u_n\right)+u_n$ ومنه وبما ان f سالبة على $]0;+\infty[$ $\left(\left(C_f\right)\right)$ 3

$c'=i\left(-1-i\sqrt{3}-2\right)+2=2+\sqrt{3}-3i$ اذن $\overline{b}'=c'$

3)أ)أثبت أن اللاحقة n للنقطة N تساوي $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$

N منتصف $[BB']$ اذن

$$n=\frac{b+b'}{2}=\frac{-1+i\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3i}{2}=\frac{1+\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}+3\right)}{2}$$

ولكن $\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3i}{2}=\frac{1+\sqrt{3}+i\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}$

ومنه $n=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$

لدينا $\frac{n-0}{c-0}=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\in\mathbb{R}$ ومنه النقط O ، N و C على استقامة واحدة

3)ب) أتبات أن $n+1=i(q+1)$ ثم استنتاج طبيعة المثلث MNQ .

لدينا $n+1=\frac{1+\sqrt{3}+i\left(3+\sqrt{3}\right)+2}{2}=\frac{3+\sqrt{3}+i\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}$

و $i\left(q+1\right)=i\ \frac{1+\sqrt{3}-i\left(3+\sqrt{3}\right)+2}{2}=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)i+3+\sqrt{3}}{2}$

ومنه $n+1=i(q+1)$ اذن $\frac{n-m}{q-m}=i$ اي $MN=QM$ و

$\left(\overrightarrow{MQ};\overrightarrow{MN}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه المثلث MNQ **قائم ومتساوي الساقين**

جـ) اثبات ان $MNPQ$ مربع .

$MNPQ$ مربع يكفي التاكد ان $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN}$ لان المثلث قائم ومتساو الساقين

لدينا $p-q=2+\sqrt{3}-\frac{1+\sqrt{3}-i\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}=\frac{3+\sqrt{3}+i\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}$

$n-m=\frac{1+\sqrt{3}+i\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}+1=\frac{3+\sqrt{3}+i\left(3+\sqrt{3}\right)}{2}$

ينتج $p-q=n-m$ اي $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{MN}$ وبالتالي $MNPQ$ مربع

التمرين الثاني : (04.5نقاط)

1) أ) **تعيين الثنائيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) :** $8x-5y=3$

$8x-5y=3$ تكافئ $8x\equiv3[5]$ تكافئ $56x\equiv27[5]$ ومنه

$x\equiv1[5]$ اي $x=5k+1$ بالتعويض في المعادلة نجد $y=8k+1$

اذن الحلول هي الثنائيات $(5k+1;8k+1)$ مع $k\in\mathbb{Z}$

ب) ليكن m عدد صحيح بحيث $m=8p+1$ و $m=5q+4$

ومنه $8p+1=5q+4$ اذن $8p-5q=3$ ومنه $(p;q)$ حل للمعادلة (E)

استنتاج أن $m\equiv9[40]$: بما ان $(p;q)$ حل للمعادلة (E) فان

$p=5k+1$ اذن $m=8(5k+1)+1$ اي ان $m=40k+9$

وهذا يعني ان $m\equiv9[40]$

جـ) تعيين أصغر عدد صحيح m أكبر من 200

لدينا $m>200$ معناه $40k+9>200$ معناه $k>\frac{191}{40}\simeq4.77$

ومنه $k=5$ معناه $\boxed{m=40\times5+9=209}$

2) ليكن n عدد طبيعي

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k فان $2^{3k}\equiv1[7]$

ب) باقي القسمة الإقليدية للعدد 1437^{2016} على 7 .

لدينا $1437\equiv2[7]$ ومنه $1437^{2016}\equiv2^{2016}[7]$ وبما ان

$2016=3\times672$ فان $2^{2016}\equiv1[7]$ ومنه $1437^{2016}\equiv1[7]$ اذن باقي القسمة الاقليدية هو 1

3) نعتبر العدد N حيث : $N=a\times10^3+b$ اي $N=\overline{a00b}^{10}$

التحقق أن $10^3\equiv-1[7]$

لدينا $10\equiv3[7]$ ومنه $10^3\equiv27[7]$ وبما ان $27\equiv-1[7]$ فان

$10^3\equiv-1[7]$

- استنتاج كل الأعداد المطلوبة N .

لدينا $10^3\equiv-1[7]$ **ومنه** $a10^3+b\equiv b-a[7]$ **ومنه**

$N\equiv b-a[7]$

ومنه $b-a=7k$ **وبما ان** $a\in\{1,2,3,4,5,7,6,8,9\}$ **و** $b\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ **ومنه الثنائيات (a,b) المطلوبة هي** $(7,0);(1,8);(2,9),(7;7);(8,1);(9,2)$ **: ينتج الأعداد المطلوبة هي**

$N\in\{7000;1008;2009;7007;8001;9002\}$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

(1: $A(1;1;1)$ ، $B(1;0;2)$ ، $C(1;2;0)$ و $D(-1;0;3)$

والمجموعة (Γ) المعادلة : $x^2-2(x+y+z-yz)+3=0$

أ)اثبات أن النقط A,B و C تقع على استقامة واحدة .

لدينا $\overrightarrow{AB}(0;-1;1)$ و $\overrightarrow{AC}(0;1;-1)$ أي ان $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}$

أي الشعاعان مرتبطان ومنه النقط على استقامية

ب) كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار بالنقط A,B و C .

$\overrightarrow{AB}$ **شعاع توجيه لـ (Δ) ويشمل A ومنه:** $(\Delta):\begin{cases}x=1\\y=1-t\ ,t\in\mathbb{R}\\z=1+t\end{cases}$

جـ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P)

(P) على (Δ) معناه **شعاع توجيه (Δ) هو شعاع ناظمي لـ (P)**

ومنه معادلة (P) من الشكل : $-y+z+d=0$ وبما ان $D\in(P)$

فان $3+d=0$ ومنه $\boxed{(P):-y+z-3=0}$

د)حساب إحداثيات المسقط العمودي D' للنقطة D على المستقيم (Δ)

هي نقطة تقاطع (P) مع (Δ) اذن بتعويض قيم التمثيل الوسيطي لـ (Δ)

في معادلة (P) نجد : $t-1+t+1-3=0$ اذن $\boxed{t=\frac{3}{2}}$ ومنه

$\boxed{D'\left(1;\frac{-1}{2};\frac{5}{2}\right)}$

2) أ) **تعيين إحداثيات النقطة M' بدلالة x,y و z**

M' نظيرة M بالنسبة (Δ) معناه : منتصف $[MM']$ ينتمي الى (Δ) و $(MM')\perp(\Delta)$

$(MM')\perp(\Delta)$ معناه $\overrightarrow{MM'}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ معناه

$(x'-x)\cdot0+(y'-y)\cdot-1+(z'-z)\cdot1=0$

ومنه $-y'+y+z'-z=0\ ....(1)$

منتصف $[MM']$ ينتمي الى (Δ) معناه $\frac{x+x'}{2}=1$ و

$\frac{y+y'}{2}=1-t$ و $\frac{z+z'}{2}=1+t$ 4

لدينا $2^3\equiv 1[7]$ ومنه من اجل كل عدد طبيعي k فان $2^{3k}\equiv 1^k[7]$ اي $2^{3k}\equiv 1[7]$

من المعادلة الاولى نجد $\boxed{x'=2-x}$ وبجمع المعادلتين الاخيرتين والضرب في العدد 2 نجد $y+y'+z+z'=4$ وبجمع هذه المعادلة مع المعادلة (1) نجد $2y+2z'=4$ ينتج $\boxed{z'=2-y}$ بتعويض القيمة الاخيرة في المعادلة (1) نجد $\boxed{y'=2-z}$

استنتاج أنّ النقطة M' تنتمي أيضا إلى مجموعة النقط (Γ)

لدينا

$$x'^2-2(x'+y'+z'-y'z')+3=4+x^2-4x-$$
$$2(2-x+2-z+2-y-4+2z+2y-yz)+3$$
$$=7+x^2-2(2+x+y+z-yz)$$
$$=3+x^2-2(x+y+z-yz)=0\quad (M\in\Gamma)$$

ومنه $M'\in(\Gamma)$

ب) برهان أ نه اذا كان $M\in(\Gamma)$ فان $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AM'}$

لتكن $M(x;y;z)\in(\Gamma)$ ، لدينا

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=(x-1)(x'-1)+(y-1)(y'-1)+(z-1)(z'-1)$$
$$=(x-1)(1-x)+(y-1)(1-z)+(z-1)(1-y)$$
$$=2x-x^2-1+y+z-yz-1+z+y-yz-1$$
$$=-(x^2-2(x+y+z-yz+3)=0$$ (لأن $M\in(\Gamma)$)

اذن $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$ **ومنه** $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{AM'}$

جـ)اثبات أن كل نقطة من المستقيم (AM) تنتمي إلى المجموعة (Γ)

لتكن $N(u;v;w)$ **نقطة من** (AM)

نعتبر التمثيل الوسيطي للمستقيم (AM)

$$\begin{cases}u=1+(x-1)t\\ v=1+(y-1)t\ ,t\in\mathbb{R}\\ w=1+(z-1)t\end{cases}$$

هل $N\in(\Gamma)$**؟**

لدينا بعد النشر والتبسيط

$$u^2-2(u+v+w-uw)+3=$$
$$=t^2\left(3+x^2-2(x+y+z-yz)\right)=0$$

ومنه من اجل كل N من (AM) فان تنتمي الى المجموعة (Γ)

د)برهان أن $(P)\cap(\Gamma)=(c)$ مع (c) دائرة مركزها D'

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من $(P)\cap(\Gamma)$ معناه $\begin{cases}x^2-2(x+y+z-yz)+3=0\\ -y+z-3=0\end{cases}$

ومنه $z=y+3$ بالتعويض في معادلة (Γ) نجد

$$x^2-2x+2y-2z+2y(y+3)+3=0$$

ومنه $x^2-2x+2y-2z+2y^2+6y+3=0$

اذن $(x-1)^2-1+(y+2)^2-4-2z+(z-3)^2+3=0$

$$(x-1)^2+(y+2)^2-2z+z^2-6z+9-2=0$$
$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2-16+7=0$$

اذن $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=3^2$ اذن M نقطة من سطح كرة (S) مركزها $\Omega(1;-2;4)$ ونصف قطرها $R=3$

اذن M نقطة من $(S)\cap(P)$ ولدينا $d(\Omega;(P))=\frac{3\sqrt2}{2}<3$ اذن

$(S)\cap(P)=(c)$ مع (c) دائرة مركزها مسقط Ω على (p)

ونصف قطرها هو $r=\sqrt{R^2-d(\Omega;(P))^2}=\sqrt{9-\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt2}{2}$

لدينا $D'\in(P)$ (واضح) و $\overrightarrow{D'\Omega}\left(0;\frac{-3}{2};\frac{3}{2}\right)$ اي $\overrightarrow{D'\Omega}=\frac{3}{2}\overrightarrow{n_p}$

ومنه $(P)\cap(\Gamma)=(c)$ **مع (c) دائرة مركزها D' ونصف قطرها** $r=\frac{3\sqrt2}{2}$

التمرين الرابع: (04 نقاط)

1)أ- التحقق من أن $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$:

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)}=\frac{e^x+1-1}{e^x+1}$

$$=1-\frac{e^x}{e^x+1}$$

ب- استنتاج أن الدالة f فردية

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $-x$ من $\mathbb{R}$ أي ($\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0)

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(-x)=1-\frac{1}{2}(-x)-\frac{2}{e^{-x}+1}$$
$$=1+\frac{1}{2}x-2\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right)=-1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{e^x+1}$$
$$=-\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right)=-f(x)$$

حساب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$$

2) أ)تبيان انه من اجل كل عدد حقيقي x فان : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{-(e^x+1)^2+4e^x}{2(e^x+1)^2}=\frac{-1}{2}\left(\frac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{(e^x+1)^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{e^{2x}-2e^x+1}{(e^x+1)^2}\right)=\frac{-1}{2}\left(\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}\right)=\frac{-1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

2) ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)\le 0$ وعليه الدالة f متناقصة تماماعلى $\mathbb{R}$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$

2) جـ) استنتاج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}^+$ فان : $1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x$

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة f انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$

لدينا : $f(x)\le 0$ أي $1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\le 0$ وعليه: $1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x$

3)أ- حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]$ وتفسر النتيجة هندسيا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{e^x+1}\right]=0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة : $y=1-\frac{1}{2}x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$.

$\boxed{5}$ يكفي ان نتاكد ان D' هي مسقط Ω على (P) اي. $\begin{cases} D'\in(P) \\ \overrightarrow{D'\Omega}=k\,\overrightarrow{n_p} \end{cases}$

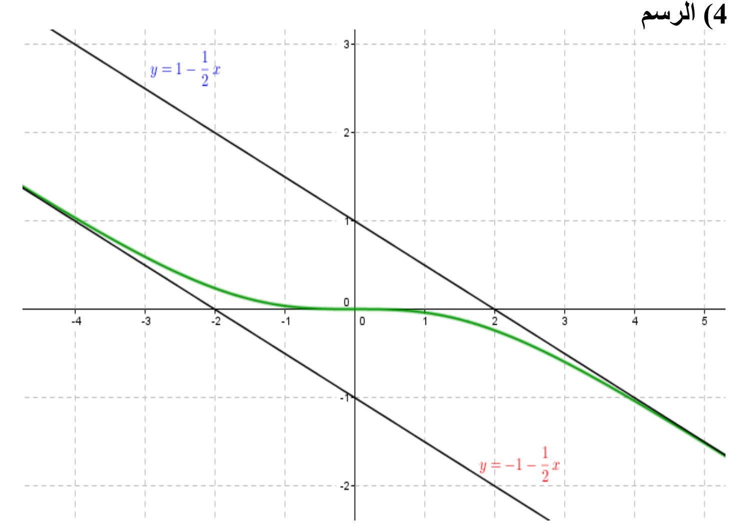
3) ب) استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا آخر (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-1-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}+1+\frac{1}{2}x\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[2-\frac{2}{e^{-x}+1}-2\right]=0$$

اذن المستقيم ذو المعادلة : $y=-1-\dfrac{1}{2}x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

4) الرسم



5) أ) تبيان انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون : $\dfrac{1}{e^{x}+1}=\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

من اجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\dfrac{e^{-x}(e^{x})}{e^{x}(e^{-x}+1)}=\dfrac{1}{1+e^{x}}$

ب) حساب بالـ cm^2 مساحة الحيز المستوي $A(\lambda)$

لدينا :

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{1}{2}x-f(x)\right)dx=\int_0^{\lambda}\left(\frac{2}{e^{x}+1}\right)dx=$$

$$-2\int_0^{\lambda}\left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)dx=-2\left[\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]_0^{\lambda}=-2\ln\left(\frac{e^{-\lambda}+1}{2}\right)(ua)$$

لكن $ua=2\times2=4cm^2$ ومنه $A(\lambda)=-8\ln\left(\dfrac{e^{-\lambda}+1}{2}\right)cm^2$

حساب $A(\lambda)$ لما λ يؤول الى $+\infty$:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[-8\ln\left(\frac{\cancel{e^{-\lambda}}^{\,0}+1}{2}\right)\right]=8\ln2\ cm^2$$

II) 1) اثبات بالتراجع انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n>0$

نسمي P_n الخاصية: $u_n>0$, P_0 صحيحة لان $u_0=1>0$

نفرض ان P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي أي : $u_n>0$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي نبرهن أن : $u_{n+1}>0$

لدينا $u_n>0$ أي $e^{u_n}>1$ أي $e^{u_n}+1>2$ أي $\dfrac{1}{e^{u_n}+1}\le\dfrac{1}{2}$ أي

$\dfrac{2}{e^{u_n}+1}\le1$ أي $1-\dfrac{2}{e^{u_n}+1}>0$ أي $u_{n+1}>0$

2)أ)التحقق من ان : $u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$:

لدينا مما سبق السؤال 2)جـ انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$ فان :

$1-\dfrac{2}{e^{x}+1}\le\dfrac{1}{2}x$ إذن: $1-\dfrac{2}{e^{u_n}+1}\le\dfrac{1}{2}u_n$ ومنه $u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}u_n$

ب) استنتاج ان المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}u_n$

اي $u_{n+1}-u_n\le\dfrac{1}{2}u_n-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n\le-\dfrac{1}{2}u_n$ ولدينا : $u_n>0$

اذن $-\dfrac{1}{2}u_n<0$ وعليه $u_{n+1}-u_n\le0$

ينتج ان المتتالية (u_n) متناقصة

3) تبيان ان : $u_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ نستعمل البرهان بالتراجع

نسمي P_n الخاصية : $u_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,

P_0 صحيحة لان $u_0=1\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$

نفرض ان P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي أي $u_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي نبرهن أن : $u_{n+1}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

لدينا مما سبق2)أ) : $u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$ وفرضية التراجع

$u_n\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$: $u_{n+1}\le\dfrac{1}{2}u_n\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ اذن $u_{n+1}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

إذن P_{n+1} صحيحة ومنه نستنتج أن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي

حساب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

بما انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_n>0$ و

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\le\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$ اذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

	إذن P_{n+1} صحيحة ومنه نستنتج أن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي. 6

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية | مديرية التربية لولاية المسيلة

امتحان البكالوريا التجريبية ماي 2010

السنة: 2010/2009 — المستوى: 3تق ريا

اختبار في مادة الرياضيات

ثانوية الشلال — المدة: 4سا و30د

اختر موضوعا واحدا وأجب عنه كاملا

الموضوع الأول

التمرين الأول:(3ن) نعتبر المعادلة التفاضلية $y'+2y=3...(1)$ على مجال I من R.

① بين أنه إذا كان k ، t حلين لـ(1) فإن $k-t$ حل للمعادلة $y'+2y=0$.

② تحقق من أن $f:x\mapsto \frac{3}{2}+e^{-2x+\lambda}$ حل لـ(1)، حيث λ ثابت حقيقي.

③ اعتمادا على ما سبق، حل (1) على المجال I. (إرشاد: يمكن فرض وجود حلg، ثم البحث عن عبارته).

التمرين الثاني:(5ن) لتكن المعادلة $z^2-4z+5=0....(1)$ بالمجهول z ، في مجموعة الأعداد المركبة C . ونرمز بـ z_1 ، z_2 لحليها، حيث z_1 جزؤه التخيلي سالب.

① حل المعادلة(1).

② أكتب على أبسط شكل ممكن العددين التاليين: $\arg\left[(z_1\times z_2)^{2010}\right]$ ، $\left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2010}\right|$.

* نعتبر الآن النقطتين A ، B صورتي العددين $2-i$ ، $2+i$ على التوالي، و S التشابه المستوي المباشر المعرف بالعبارة المركبة: $S:z'=i.z+b$ ، حيث b عدد مركب معطى، و $i^2=-1$.

③ جد b حتى يحول S النقطة A إلى B .

④ عين عندئذ عناصر S .

التمرين الثالث:(8ن) نعرف الدالة f بـ: $f(x)=\frac{x^2+e^x}{e^x}$ ، وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (يرمز e إلى أساس اللوغاريتم النيبيري)

الجزء الأول:

① أدرس تغيرات f . (إرشاد: في حساب النهايات لاحظ أن $\frac{x^2}{e^x}=4\left(\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2$)

② أدرس الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة لـ(C) .

③ جد عبارة الدالة المشتقة الثانية وادرس إشارتها. بم تفسر ذلك بيانيا؟

④ أنشئ المستقيمات المقاربة و (C) .

الجزء الثاني:

① بين أنه من أجل كل x من R يكون: $f(x)=x^2.e^{-x}+1$.

② باستخدام قاعدة المكاملة بالتجزئة، جد دالة أصلية للدالة f .

③ اشتق الدالة $x\mapsto -\frac{x^2+2x+2}{e^x}$ ، ثم احسب M_α مساحة الحيز المستوي المحدد بـ(C)، والمستقيمات المعرفة بالمعادلات: $y=1$ ، $x=2$ ، $x=\alpha$ ، حيث α عدد حقيقي معطى أكبر تماما من2.

④ أحسب $\lim_{\alpha\to+\infty} M_\alpha$. ما هو التفسير الهندسي لهذه النهاية؟

الجزء الثالث:

لتكن الدالة $g:x\mapsto x^2.e^{-|x|}+1$

① أدرس شفعية g .

② بين أن f و g متساويتان على المجال $[0,+\infty[$.

③ أنشئ (C_g) .

التمرين الرابع:(4ن) نعتبر المعادلة $3x-4y+5=0...(1)$ ، حيث x ، y مجهولان طبيعيان.

① عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 7^n على5.

② بين أنه مهما كان n من N فإن: $(1+2010+7^{2010})$ يقبل القسمة على5. صـ3/1

③ من أجل $y=2$ ، استنتج حلا خاصا لـ(1)، ثم جد جميع حلولها (x,y) في N^2 .

④ إذا كان (x,y) حلا لـ(1)، ما هو باقي قسمة 7^{x+3} على5؟

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(4ن) u متتالية حسابية تحقق الجملة $\begin{cases} u_1-3u_2+u_3=-1 \\ u_1^2-u_3^2=-4\sqrt{2} \end{cases}$.

① جد كلا من u_1 ، u_2 ، u_3.

② أكتب بدلالة n العدد S_n المعرف بـ: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

③ أحسب العدد الطبيعي m الذي يحقق: $S_m-\frac{m(m-1)}{\sqrt{2}}=24-24\sqrt{2}$.

④ ما هو باقي قسمة العدد السابق m على5؟

⑤ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n، يحقق العدد السابق m ما يلي: $m^{2n+1}+2\times 3^{8n+1}\equiv 0[5]$.

التمرين الثاني:(4ن) الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، ونعتبر النقط $A(3,0,1)$ ، $B(0,1,3)$ ، $C(1,1,0)$.

① بين أن النقط المذكورة ليست على استقامة واحدة.

② هل تقع النقط O، A ، B ، C في نفس المستوي؟

③ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) .

④ ما هي (L) مجموعة النقط N من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=2$ ؟

⑤ أحسب المسافة بين النقطة A، والمجموعة (L) .

التمرين الثالث:(8ن) نعرف الدالة f بـ: $f(x)=x+\ln\frac{1}{x^2}$ ، وليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (يرمز $\ln$ إلى اللوغاريتم النيبيري)

الجزء الأول:

① أدرس تغيرات f .

② أدرس الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة لـ(C).

③ بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد b في R، يحقق $-0.75<b<-0.5$.

④ أنشئ (C) .

الجزء الثاني:

① بين أنه من أجل كل $x>0$ يكون: $f(x)=x-2\ln x$.

② باستخدام قاعدة المكاملة بالتجزئة، جد دالة أصلية g للدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

③ اشتق الدالة $x\mapsto \frac{1}{2}x^2+2x-2x.\ln x$ ، ثم احسب M_a مساحة الحيز المستوي المحدد بـ(C)، والمستقيمات المعرفة بالمعادلات: $x=2$ ، $x=a$ ، مع العلم أن a عدد حقيقي يحقق $0<a<2$.

④ أحسب $\lim\limits_{\substack{a\to 0 \\ >}} M_a$. ماذا تمثل هذه النهاية هندسيا؟

الجزء الثالث:

لتكن الدالة $h:x\mapsto |x|+\ln\frac{1}{x^2}$.

① بين أنه على المجال $]0,+\infty[$ يكون: $f(x)=h(x)$.

② هل h زوجية؟

③ أنشئ (C_h) .

التمرين الرابع:(4ن) كيس به 6 كريات مرقمة كما يلي:1، 1، 1، 2، 2، 3.

① نسحب بصفة عشوائية كريتين دفعة واحدة، ونسجل الرقمين الظاهرين.
أكتب المجموعة الكلية Ω، واحسب احتمال أن يظهر الرقم1 فقط.

②نكرر التجربة السابقة، ونعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء الرقمين الظاهرين.
أكتب بالقائمة الحادثة: $(X=2)$، ثم عرف في جدول قانون احتمال X .

③ أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ ، التباين $V(X)$ والانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتغير X .
انتهى

التصحيح و التنقيط

الموضوع الأول

التمرين الأول: (3ن) $y'+2y=3...(1)$.

① **إثبات أنه إذا كان k ، t حلين لـ(1) فإن $k-t$ حل للمعادلة** $y'+2y=0$: **01 ن**

نفرض k ، t حلين لـ(1)، نجد: $k'(x)+2k(x)=3$ و $t'(x)+2t(x)=3$ ، ومنه: $(k'(x)-t'(x))+2(k(x)-t(x))=0$ ، و هذا معناه $k-t$ حل للمعادلة $y'+2y=0$.

② **التحقق من أن** $f:x\mapsto \frac{3}{2}+e^{-2x+\lambda}$ **حل لـ(1):** **01 ن** نجد: $f(x)=\frac{3}{2}+e^{-2x+\lambda}$ ، و $f'(x)=-2e^{-2x+\lambda}$ ، فيكون:

$f'(x)+2f(x)=-2e^{-2x+\lambda}+2\left(\frac{3}{2}+e^{-2x+\lambda}\right)=3$. نعم f حل لـ(1).

③ **حل المعادلة:** **01 ن** (1) على المجال I: ليكن g حلا لها مختلفا عن f . نجد حسب ما سبق $(f'(x)-g'(x))+2(f(x)-g(x))=0$

ومنه: $\frac{f'(x)-g'(x)}{f(x)-g(x)}=-2$ ، أي $\ln|f(x)-g(x)|=-2x+t$ ، $t\in R$. إذا: $|f(x)-g(x)|=e^{-2x+t}=e^{t}.e^{-2x}$ ، إذا يمكن أن نكتب:

$f(x)-g(x)=r.e^{-2x}$ ، $r\in R^{*}$. أي: $g(x)=f(x)-r.e^{-2x}=\frac{3}{2}+e^{-2x+\lambda}-r.e^{-2x}=\frac{3}{2}+(e^{\lambda}-r).e^{-2x}$ ، أي:

$\boxed{g(x)=\frac{3}{2}+a.e^{-2x}\text{ ، }a\in R}$. لاحظ أن f حالة خاصة من هذا.

التمرين الثاني:(5ن) $z^2-4z+5=0....(1)$

① **حل المعادلة(1): المميز:** **01 ن** $\Delta=b^2-4ac=16-20=-4=(2i)^2$ ، ومنه لـ (1) حلان في C هما:

$\boxed{z_1=\frac{-b-2i}{2a}=\frac{4-2i}{2}=2-i}$ ، $\boxed{z_2=\frac{-b+2i}{2a}=\frac{4+2i}{2}=2+i}$.

② **كتابة العددين** $\arg\left[(z_1\times z_2)^{2010}\right]$ ، $\left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2010}\right|$. **على أبسط شكل ممكن:**

$$\arg\left[(z_1\times z_2)^{2010}\right]=2010\times\arg(z_1\times z_2)=2010\times\arg(2-i)\times(2+i)=2010\times\arg\left[(2-i)\times(2+i)\right]$$
$$=2010\times\arg 5=0$$

إذن: $\boxed{\arg\left[(z_1\times z_2)^{2010}\right]=0}$. **01 ن**

$\left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2010}\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^{2010}=\left(\frac{|2-i|}{|2+i|}\right)^{2010}=\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)^{2010}=1^{2010}$ ، ومنه: $\boxed{\left|\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2010}\right|=1}$. **0.5 ن**

③ نعتبر $A(2,-1)$ ، $B(2,1)$ و $S:z'=i.z+b$.

إيجاد b حتى يحول S النقطة A إلى B : **01 ن** يتحقق $z_2=i.z_1+b$ أي: $2+i=i(2-i)+b$ أي: $\boxed{b=1-i}$.

④ **تعيين عناصر S :** يكون $S:z'=i.z+1-i$.

المركز: هو النقطةW صورة حل المعادلة $z=i.z+1-i$. أي صورة $z-iz=1-i$ ، أي $z(1-i)=1-i$ ، أي $z=1$. أي المركز $\boxed{W(1,0)}$.

0.5 ن النسبة: هي $|i|$ أي: $\boxed{1}$. **0.5 ن** الزاوية: هي $\arg(i)$ أي هي $\boxed{\frac{\pi}{2}}$. **0.5 ن**

التمرين الثالث:(8ن) $f(x)=\frac{x^2+e^x}{e^x}$.

الجزء الأول:

① **دراسة تغيرات f :**

مجموعة التعريف: **0.25 ن** $D_f=\left]-\infty,+\infty\right[$.

النهايات: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2}{e^x}+\frac{e^x}{e^x})=+\infty$ ، **0.25 ن** ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2}{e^x}+\frac{e^x}{e^x})=\lim_{x\to+\infty}\left[4\left(\frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2+1\right]=1$. **0.5 ن**

اتجاه التغير: f تقبل الاشتقاق على R حيث: $f'(x)=\frac{(2x+e^x)e^x-(x^2+e^x)e^x}{(e^x)^2}$ ، نجد: $f'(x)=\frac{-x^2+2x}{e^x}$. أي: $f'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$.

0.25 ن ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
f	$+\infty$ ↘		1	↗	$\frac{4}{e^2}+1$	↘	1

0.5 ن

② **دراسة الفروع اللانهائية:** **0.25 ن+ 0.25 ن**

مما سبق المستقيم $(\Delta): y=1$ مقارب لـ(C) بجوار $+\infty$.

ونجد: $\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2+e^x}{xe^x}=\frac{x}{e^x}+\frac{1}{x}$ ، ومنه: $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(\frac{x}{e^x}+\frac{1}{x})=-\infty$ ، إذا لـ(C) فرع قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب بجوار $-\infty$.

③ **إشارة المشتقة الثانية:** **0.5 ن**

f تقبل الاشتقاق مرتين على R حيث:

$f''(x)=\frac{(-2x+2)e^x-(-x^2+2x)e^x}{(e^x)^2}$ ، نجد:

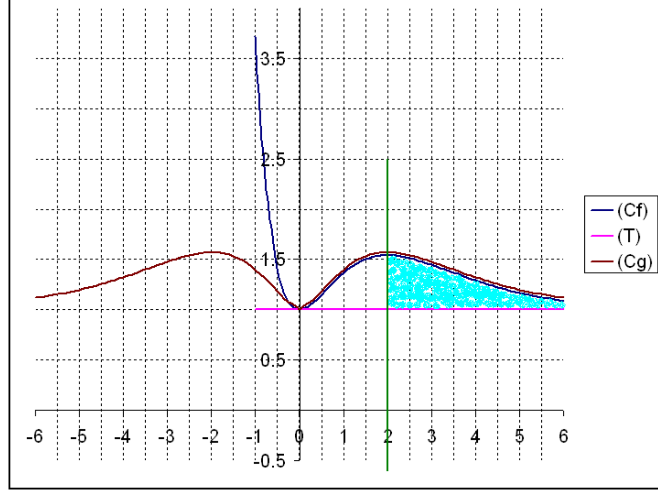
$f''(x)=\frac{x^2-4x+2}{e^x}$ ، أي: $f''(x)=\frac{(x-(2+\sqrt{x}))(x-(2-\sqrt{x}))}{e^x}$ ،

وإشارة f'' في الجدول التالي:

x	$-\infty$		$2-\sqrt2$		$2+\sqrt2$		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	-	0	+	

وتفسير ذلك أن لـ(C) نقطتا انعطاف فاصلتاهما $2+\sqrt2$ ، $2-\sqrt2$.

④**الإنشاء:** (أنظر الشكل) **0.75 ن**



الجزء الثاني:

① **تبيين أنه من أجل كل** x **من R يكون:** $f(x)=x^2.e^{-x}+1$:

لدينا: $f(x)=\frac{x^2+e^x}{e^x}$ ، ومنه: $f(x)=\frac{x^2}{e^x}+\frac{e^x}{e^x}$ أي:

$f(x)=x^2.e^{-x}+1$. **0.5 ن**

② **إيجاد دالة أصلية للدالة** f **:** **1 ن** لتكن g دالة أصلية لها، نجد:

$g(x)=\int_a^x f(s)ds$ ، حيث a ثابت حقيقي. ومنه: $g(x)=\int_a^x(s^2.e^{-s}+1)ds$ ،

ومنه: $g(x)=\int_a^x s^2.e^{-s}ds+\int_a^x ds....(1)$. لنحسب $\int_a^x s^2.e^{-s}ds$ بالمكاملة

بالتجزئة: نضع $\begin{cases} h(s)=s^2 \\ k'(s)=e^{-s}\end{cases}$ و $\begin{cases} h'(s)=2s \\ k(s)=-e^{-s}\end{cases}$ فيكون: $\int_a^x s^2.e^{-s}ds=[h(S).k(s)]_a^x-\int_a^x 2s(-e^{-s})ds=-x^2e^{-x}+2\int_a^x se^{-s}ds.....(2)$.

لنحسب الآن $\int_a^x s.e^{-s}ds$ بالمكاملة بالتجزئة: فنضع $\begin{cases} h(s)=s \\ k'(s)=e^{-s}\end{cases}$ و $\begin{cases} h'(s)=1 \\ k(s)=-e^{-s}\end{cases}$ ويكون: $\int_a^x s.e^{-s}ds=\left[-se^{-s}\right]_a^x-\int_a^x -e^{-s}ds$ ، ومنه:

$\int_a^x s.e^{-s}ds=\gamma-xe^{-x}-\left[e^{-s}\right]_a^x=c-xe^{-x}-e^{-x}$. من هذه النتيجة ومن(1) و(2) نجد:

$g(x)=\beta-x^2e^{-x}+2\int_a^x se^{-s}ds+x-a=\beta-x^2e^{-x}+x-a+2\left[c-xe^{-x}-e^{-x}\right]$ ، بالحساب نجد:

$g(x)=-(x^2+2x+2)e^{-x}+x+A$ حيث A ثابت حقيقي. يمكن جعل: $g(x)=-(x^2+2x+2)e^{-x}+x$.

③ **اشتقاق الدالة** $x \mapsto -\frac{x^2+2x+2}{e^x}$ **وحساب** M_α **:** 1 ن نضع: $h(x) = -\frac{x^2+2x+2}{e^x}$ ، نجد أن h تقبل الاشتقاق على R حيث:

$h'(x) = x^2 e^{-x}$ ، ومنه نستنتج أن الدالة $x \mapsto -\frac{x^2+2x+2}{e^x} + x$ دالة أصلية للدالة f .(فائدة: لاحظ أن هذه الدالة الأخيرة هي نفسها الدالة g

). إذا: $M_\alpha = \int_2^\alpha (f(x)-1)dx = \left[-(x^2+2x+2)e^{-x} + x - x\right]_2^\alpha$ ، أي: $M_\alpha = 10e^{-2} - (\alpha^2+2\alpha+2)e^{-\alpha}$ (مقدرة بوحدة المساحات).

④ **حساب** $\lim_{\alpha \to +\infty} M_\alpha$ **:** 0.5 ن نجد: $\lim_{\alpha \to +\infty} M_\alpha = 10e^{-2}$. و هذه النهاية تمثل مساحة الحيز غير المحدود المظلل باللون الأزرق في الشكل.

الجزء الثالث: $g(x) = x^2.e^{-|x|} + 1$.

① **دراسة شفعية** g **:**

g معرفة على R ، ونجد من أجل كل x من R : $g(-x) = (-x)^2.e^{-|-x|} + 1 = x^2.e^{-|x|} + 1 = g(x)$ ، إذا g زوجية. 0.5 ن

② **تبيين أن** f **و** g **متساويتان على المجال** $[0,+\infty[$ **:** من الواضح أنه إذا كان x موجبا يكون: $g(x) = f(x)$ ، إذا:

f و g متساويتان على المجال $[0,+\infty[$. 0.5 ن

③ **إنشاء** (C_g) **:** مما سبق يمكن إنشاء (C_g) دون دراسة الدالة g . (أنظر الشكل). 0.5 ن

التمرين الرابع:(4ن) $3x - 4y + 5 = 0 ...(1)$.

① **تعيين تبعا لقيم العدد الطبيعي** n **باقي قسمة** 7^n **على5:** بالتجريب نجد: $7^0 \equiv 1[5]$ ، $7^1 \equiv 2[5]$ ، $7^2 \equiv 4[5]$ ، $7^3 \equiv 3[5]$ ، $7^4 \equiv 1[5]$ ،

ومنه الخلاصة التالية: *إذا كان $n = 4k$ فإن باقي قسمة 7^n على 5 هو 1، *إذا كان $n = 4k+1$ فإن باقي قسمة 7^n على 5 هو 2،

*إذا كان $n = 4k+2$ فإن باقي قسمة 7^n على 5 هو 4، *إذا كان $n = 4k+3$ فإن باقي قسمة 7^n على 5 هو 3. 1

ن حيث k عدد طبيعي كيفي في كل حالة من الحالات الأربعة.

② **تبيين أنه مهما كان** n **من** N **فإن:** $(7^{2010} + 2010 + 1)$ **يقبل القسمة على5:**

واضح أن: $2010 = 402 \times 5$ ومن جهة أخرى: $2010 = 502 \times 4 + 2$ فيكون: $2010 \equiv 0[5]$ و $7^{2010} \equiv 7^{502\times4+2} \equiv 4[5]$. فبالجمع نحصل

على: $(7^{2010} + 2010 + 1) \equiv (4+0+1)[5]$ أي: $(7^{2010} + 2010 + 1) \equiv 5[5]$ أي: $(7^{2010} + 2010 + 1) \equiv 0[5]$. ومنه:

$(7^{2010} + 2010 + 1)$ يقبل القسمة على5. 1 ن

③ **حل المعادلة(1) في** N^2 **:** من أجل $y = 2$ نجد $3x - 4\times2 + 5 = 0$ أي $x = 1$ ، إذا: $(1,2)$ هو الحل الخاص المطلوب. ويكون:

$\begin{cases} 3x-4y+5=0 \\ 3(1)-4(2)+5=0 \end{cases}$ ومنه: $3(x-1) - 4(y-2) = 0$ أي: $3(x-1) = 4(y-2)$. فيكون $3/4(y-2)$ ، وبما أن 3 أولي مع4، وحسب مبرهنة

غوص فإن $3/(y-2)$ أي: $y - 2 = 3k$ حيث $k \in N$ ، أي: $y = 3k+2$ حيث $k \in N$. وبالتعويض في (1) نجد بعد بعض الحساب أن:

$x = 4k+1$. أي أن حلول (1) في N^2 هي الثنائيات: $(4k+1, 3k+2)$ حيث $k \in N$. 1 ن

④ **إيجاد باقي قسمة** 7^{x+3} **على 5 إذا كان** (x,y) **حلا لـ(1):** إذا يكون $x = 4k+1$ حيث $k \in N$. فيكون:

$7^{x+3} = 7^{4k+1+3} = 7^{4k+4} = 7^{4(k+1)} = 7^{4k'}$ ومنه فإن باقي قسمة 7^{x+3} على 5 هو 1. 1 ن

الموضوع الثاني

التمرين الأول:(4ن) $\begin{cases} u_1 - 3u_2 + u_3 = -1 ...(أ) \\ u_1^2 - u_3^2 = -4\sqrt{2} ...(ب) \end{cases}$.

① **إيجاد كل من** u_1 **،** u_2 **،** u_3 **:** بما أن u حسابية فإن $2u_2 = u_1 + u_3$ ، وحسب (أ) نجد $2u_2 - 3u_2 = -1$ أي $u_2 = 1$ ، وبذلك تصبح الجملة

كما يلي: $\begin{cases} u_1 + u_3 = 2 \\ (u_1 - u_3)(u_1 + u_3) = -4\sqrt{2} \end{cases}$ أي: $\begin{cases} u_1 + u_3 = 2 \\ u_1 - u_3 = -2\sqrt{2} \end{cases}$ ومن: $u_1 = 1 - \sqrt{2}$ ، $u_3 = 1 + \sqrt{2}$. 1 ن

② **كتابة بدلالة** n **العدد** S_n **المعرف بـ:** $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ **:** $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2}(u_1 + u_1 + (n-1)r)$ ، حيث r هو الأساس.

إذن: $S_n = \frac{n}{2}(2 - 2\sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2})$ ، وأخيرا: $S_n = n(1 - \sqrt{2} + \frac{n-1}{\sqrt{2}})$. 0.5 ن

③ **حساب العدد الطبيعي m الذي يحقق: $S_m - \frac{m(m-1)}{\sqrt{2}} = 24-24\sqrt{2}$** : إذا يكون: $m(1-\sqrt{2}+\frac{m-1}{\sqrt{2}})-\frac{m(m-1)}{\sqrt{2}} = 24-24\sqrt{2}$ ،

أي: $m(1-\sqrt{2}) = 24-24\sqrt{2}$ ، أي: $m(1-\sqrt{2}) = 24(1-\sqrt{2})$ ، أي: $\boxed{m=24}$. **1 ن**

④ **باقي قسمة العدد m على 5:** الباقي هو 4 **0.25 ن**

⑤ **إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، يتحقق: $m^{2n+1}+2\times 3^{8n+1} \equiv 0[5]$** : بالتجريب نجد:

$3^0 \equiv 1[5]$ ، $3^1 \equiv 3[5]$ ، $3^2 \equiv 4[5]$ ، $3^3 \equiv 2[5]$ ، $3^4 \equiv 1[5]$ ، ومنه: $3^{4n} \equiv 1[5]$ و $3^{8n} \equiv 1[5]$ ، وعليه $\boxed{3^{8n+1} \equiv 3[5]}$ ، ومن جهة أخرى:

$m \equiv 4[5]$ فيكون: $\boxed{m \equiv -1[5]}$. ونجد: $m^{2n+1}+2\times 3^{8n+1} \equiv (-1)^{2n+1}+2\times 3[5]$ أي: $m^{2n+1}+2\times 3^{8n+1} \equiv -1+6[5]$. فيكون:

$m^{2n+1}+2\times 3^{8n+1} \equiv 5[5]$ ، وأخيرا: $\boxed{m^{2n+1}+2\times 3^{8n+1} \equiv 0[5]}$.. **1.25 ن**

التمرين الثاني:(4ن) $A(3,0,1)$ ، $B(0,1,3)$ ، $C(1,1,0)$.

① **تبيين أن النقط المذكورة ليست على استقامة واحدة:** نجد $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$. ونلاحظ أن مركباتهما ليست متناسبة فيما بينها مثنى

مثنى، مما يعني أن الشعاعين غير متوازيين، ومنه النقط ليست على استقامة واحدة. **0.5 ن**

② **وقوع النقط O ، A ، B ، C في نفس المستوي:** لدينا: $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ، وحتى تقع O ، A ، B ، C في نفس المستوي

ينبغي أن يوجد عددان حقيقيان α ، β حيث: $\boxed{\overrightarrow{OA}=\alpha\overrightarrow{OB}+\beta\overrightarrow{OC} \text{ أو: } \overrightarrow{OB}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OC} \text{ أو: } \overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}}$ ، ومعنى ذلك

أن إحدى الجمل التالية على الأقل، تقبل على الأقل حلا في R^2 : $\begin{cases}3=\beta\\0=\alpha+\beta\\1=3\alpha\end{cases}$ ، $\begin{cases}0=3\alpha+\beta\\1=\beta\\3=\alpha\end{cases}$ ، $\begin{cases}1=3\alpha\\1=\beta\\0=\alpha+3\beta\end{cases}$ ، ولكن كل من هذه الجمل

لا تقبل أي حل في R^2 ، وبالتالي النقط O ، A ، B ، C ليست من نفس المستوي. **1 ن**

③ **إعطاء تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) :** لتكن $N(x,y,z)$ نقطة من (AB) فمعنى ذلك أن: $\overrightarrow{AN} // \overrightarrow{AB}$ ، أي: $\boxed{\overrightarrow{AN}=t.\overrightarrow{AB} \quad \backslash t\in R}$ ،

أي: $\begin{cases}x-3=-3t\\y=t \quad \backslash t\in R\\z-1=2t\end{cases}$ ، يمكن أن نكتب: $\begin{cases}x=3-3t\\y=t \quad \backslash t\in R\\z=1+2t\end{cases}$. **1 ن**

④ **(L) مجموعة النقط N من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=2$:** نعتبر $N(x,y,z)$ ، فنجد:

$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB}=2$ تكافئ $(x-3).(-3)+y.1+(z-1).2=2$ ، ومنه: $\boxed{(L):3x-y-2z-5=0}$ إذا $\boxed{(L) \text{ هي المستوي المعرف بهذه}}$

المعادلة. **0.75 ن**

⑤ **حساب المسافة بين النقطة A ، والمجموعة (L) :** هذه المسافة هي العدد: $\frac{|3x_A-y_A-2z_A-5|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ أي هي: $\frac{|3\times 3-0-2\times 1-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}}$ ،

هذه المسافة هي: $\boxed{\frac{2}{\sqrt{14}}}$. (مقدرة بوحدة الأطوال). **0.75 ن**

التمرين الثالث:(8ن) $f(x)=x+\ln\frac{1}{x^2}$.

الجزء الأول:

① دراسة تغيرات f : مجموعة التعريف: $D_f =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. **0.25 ن**

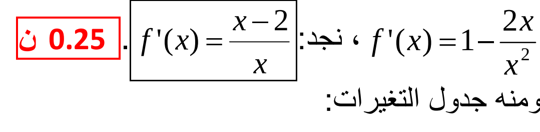
النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ،

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-2\ln x)=\lim_{x\to+\infty} x(1-2\frac{\ln x}{x})=+\infty$$

، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}(x+\ln\frac{1}{x^2})=+\infty$ ،

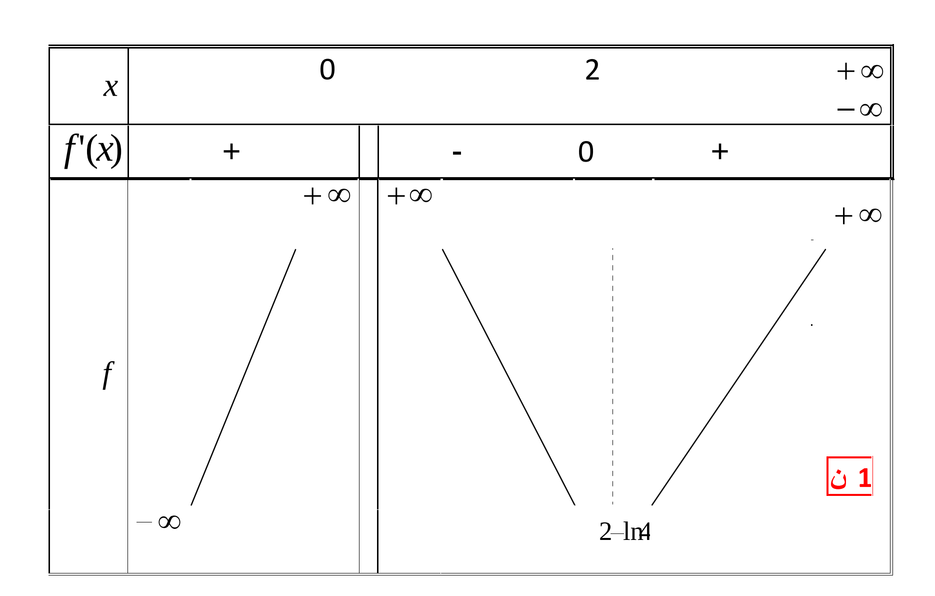
$\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}(x+\ln\frac{1}{x^2})=+\infty$. **0.5 ن**

اتجاه التغير: f تقبل الاشتقاق على R^* حيث:



$f'(x)=1-\frac{2x}{x^2}$ ، نجد: $f'(x)=\frac{x-2}{x}$. **0.25 ن**

ومنه جدول التغيرات:



x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2-\ln4$	↗	$+\infty$

1 ن

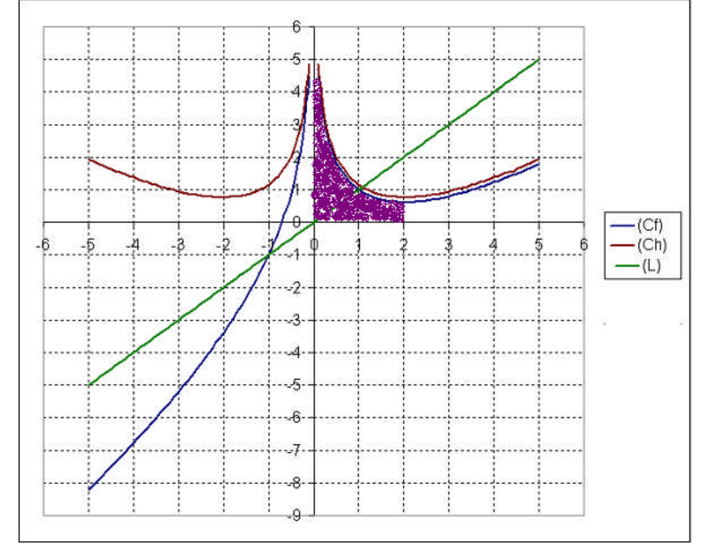
② **دراسة الفروع اللانهائية:** مما سبق محور التراتيب مقارب لـ (C).

ونجد: $\frac{f(x)}{x}=1+\frac{\ln\frac{1}{x^2}}{x}=1-\frac{\ln x^2}{x}$ ، ومنه: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\frac{\ln x^2}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\frac{\ln(-x)^2}{x})=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+2\frac{\ln(-x)}{-x})$

إذا: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$. ونجد: $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(\ln\frac{1}{x^2})=-\infty$. وبطريقة مشابهة نجد: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-\infty$. وعليه فإن (C) يقبل فرعي قطع مكافئ في اتجاه المستقيم $(L): y=x$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$ و $+\infty$. **1 ن**

③ **تبيين أن المعادلة** $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيد** b **في** R **، يحقق** $-0.75<b<-0.5$:

من جدول التغيرات (وبملاحظة أن: $2-\ln4>0$) نجد أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في R ، هذا من جهة، ومن جهة أخرى على المجال $[-0.75,-0.5]$ الدالة f مستمرة، و $f(-0.75)<0$ ، $f(-0.5)>0$. فحسب مبرهنة القيم المتوسطة الحل b للمعادلة $f(x)=0$ يحقق $-0.75<b<-0.5$. **0.5 ن**



④ **الإنشاء:** **0.75 ن**

الجزء الثاني:

① **تبيين أنه من أجل كل** $x>0$ **يكون:** $f(x)=x-2\ln x$:

واضح أن: $f(x)=x-\ln x^2$ ، وإذا كان $x>0$ ، فإنه يصبح:

$f(x)=x-2\ln x$. **0.5 ن**

② **إيجاد دالة أصلية** g **للدالة** f **على المجال** $]0,+\infty[$: نجد:

$g(x)=\int_a^x f(s)ds$ ، حيث a ثابت حقيقي موجب. أي:

$g(x)=\int_a^x (s+\ln\frac{1}{s^2})ds$ ،ومنه: $g(x)=\int_a^x \ln\frac{1}{s^2}ds+\int_a^x sds....(1)$.

لنحسب $\int_a^x \ln\frac{1}{s^2}ds$: $\int_a^x \ln\frac{1}{s^2}ds=-2\int_a^x \ln sds$ ، لنحسب $\int_a^x \ln sds$

بالمكاملة بالتجزئة: نضع $\begin{cases} h'(s)=1 \\ k(s)=\ln s \end{cases}$ و $\begin{cases} h(s)=s \\ k'(s)=\frac{1}{s} \end{cases}$ ويكون $\int_a^x \ln s ds = [h(S).k(s)]_a^x - \int_a^x s\frac{1}{s}ds = x\ln x + c - x + a$. ومن هذا ومن (1)

x_i	1	2	3	4	6
p_i	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$

يمكن أن نعتبر: $g(x) = -2(x\ln x - x + b) + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2$، وأخيرا يمكن وضع:

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2x\ln x$. **0.75 ن**

③ **اشتقاق الدالة** $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2x.\ln x$ ، **وحساب** M_a **:** هذه الدالة هي g، ونعلم أن: $g'(x) = f(x)$.

$M_a = \int_a^2 f(x)dx = [g(x)]_a^2 = g(2) - g(a)$، ومنه: $M_a = \frac{1}{2}2^2 + 2\times 2 - 2\times 2\ln 2 - (\frac{1}{2}a^2 + 2a - 2a\ln a)$، أي:

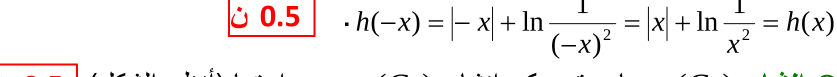
$M_a = 6 - 4\ln 2 - \frac{1}{2}a^2 - 2a + 2a\ln a$. (مقدرة بوحدة للمساحات) **0.5 ن**

④ **حساب** $\lim\limits_{\substack{> \\ a\to 0}} M_a$ **:** نجد: $\lim\limits_{\substack{> \\ a\to 0}} M_a = \lim\limits_{\substack{> \\ a\to 0}}(6 - 4\ln 2 - \frac{1}{2}a^2 - 2a + 2a\ln a)$. ومنه: $\lim\limits_{\substack{> \\ a\to 0}} M_a = 6 - 4\ln 2$. وهذه النهاية تمثل مساحة الحيز غير المحدود المظلل بالبنفسجي في الشكل. **0.5 ن**

الجزء الثالث: $h : x \mapsto |x| + \ln\frac{1}{x^2}$.

① **تبيين أنه على المجال** $]0,+\infty[$ **يكون:** $f(x) = h(x)$ **:** على هذا المجال x موجب ومنه $|x| = x$، إذا: $h(x) = x + \ln\frac{1}{x^2} = f(x)$. **0.5 ن**

② **نعم** h **زوجية:** لأنها معرفة على $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$، ومن أجل أي x من هذه المجموعة يكون:



$h(-x) = |-x| + \ln\frac{1}{(-x)^2} = |x| + \ln\frac{1}{x^2} = h(x)$. **0.5 ن**

③ **إنشاء** (C_h) **:** مما سبق يمكن إنشاء (C_h) دون دراستها (أنظر الشكل). **0.5 ن**

<u>التمرين الرابع:</u>(4ن) كيس به 6 كريات مرقمة كما يلي: 1، 1، 1، 2، 2، 3.

① نسحب بصفة عشوائية كريتين دفعة واحدة، ونسجل الرقمين الظاهرين.

كتابة المجموعة Ω، وحساب احتمال أن يظهر الرقم 1 فقط:

$\Omega = \{\{1_1,1_2\},\{1_1,1_3\},\{1_1,2_1\},\{1_1,2_2\},\{1_1,3\},\{1_2,1_3\},\{1_2,2_1\},\{1_2,2_2\},\{1_2,3\},\{1_3,2_1\},\{1_3,2_2\},\{1_3,3\},\{2_1,2_2\},\{2_1,3\},\{2_2,3\}\}$.

احتمال ظهور الرقم 1 فقط هو: $p(\{\{1_1,1_2\},\{1_1,1_3\},\{1_2,1_3\}\}) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ **1ن + 0.25 ن**

② نكرر التجربة السابقة، ونعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء الرقمين الظاهرين.

كتابة الحادثة: $(X = 2)$، **وتعريف احتمال** X **:**

$(X = 2) = \{\{1_1,2_1\},\{1_1,2_2\},\{1_2,2_1\},\{1_2,2_2\},\{1_3,2_1\},\{1_3,2_2\}\}$، ونعرف قانون احتمال X بالجدول التالي: **0.5ن + 0.75 ن**

③ **حساب الأمل الرياضياتي** $E(X)$، **التباين** $V(X)$ **والانحراف المعياري** $\sigma(X)$ **للمتغير** X **:**

$E(X) = \sum_1^n p_i x_i = 1\times\frac{3}{15} + 2\times\frac{6}{15} + 3\times\frac{3}{15} + 4\times\frac{1}{15} + 6\times\frac{2}{15}$ أي: $E(X) = \frac{8}{3}$.

$V(X) = \left(\sum_1^n p_i x_i^2\right) - E^2(X) = 1\times\frac{3}{15} + 4\times\frac{6}{15} + 9\times\frac{3}{15} + 16\times\frac{1}{15} + 36\times\frac{2}{15} - \frac{64}{9}$، أي: $V(X) = \frac{106}{45}$.

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ أي: $\sigma(X) = \sqrt{\frac{106}{45}}$. **0.5 ن + 0.5ن + 0.5 ن**

انتهى

....

الشعبة: علوم تجريبية+رياضيات　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　دورة: ماي 2015

اختبار في مادة : الرياضيات　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　المدة: 3 ساعات ونصف

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقط) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=-6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2n-1$$

1) أ - احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

ب- برهن أنه من أجل كل $n\geq 3$ ، $u_n>0$.

ج - استنتج أنه من أجل كل $n\geq 4$ ، $u_n>2n-3$.

د- ما هي نهاية المتتالية (u_n)؟

2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=u_n-4n+10$

أ - برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب - بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{2-n}+4n-10$

ج - احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+......+u_n$

التمرين الثاني : (5 نقط)

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة ℂ، المعادلة ذات المجهول Z : $(Z-2i)(Z^2-2\sqrt{3}Z+4)=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللاحقات:

$Z_A=\sqrt{3}-i$ ، $Z_B=\sqrt{3}+i$ ، $Z_C=2i$ و $Z_D=-\sqrt{3}-i$ على الترتيب .

أ- علّم النقط A ، B ، C و D .

ب- أكتب العدد $\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي .استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج- بيّن أن العدد $\left(\frac{Z_A-Z_B}{Z_C-Z_B}\right)^{2010}$ حقيقي.

د-تحقّق أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

3) أ -عين النسبة والزاوية و مركز التشابه المباشر S الذي يحول O إلى A ويحول C إلى D .

ب - تحقق أن صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C.

4) أ- لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات 1 ، -1 و 2 على الترتيب. عين احداثيتي النقطة G

ب - بين أن المجموعة (Γ) للنقط M من المستوي حيث: $MA^2-MB^2+2MC^2=8$ هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 1.

أ- ما هي صورة المجموعة (Γ) بالتشابه S ؟

التمرين الثالث: (4 نقاط) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط $A\left(1;0;2\right)$، $B\left(0;1;2\right)$، $C\left(1;-2;0\right)$ والمستوي $\left(P\right)$ الذي معادلته $3x-2y+z+3=0$.

1) أ - بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا $\left(ABC\right)$.

ب-تحقق أن الشعاع $\vec{n}\left(1;1;-1\right)$ ناظمي للمستوي $\left(ABC\right)$ ثم استنتج معادلة ديكارتية له.

2) أ-بين أن المستويين $\left(P\right)$ و $\left(ABC\right)$ متعامدان.

ب- بين أن تقاطع المستويين $\left(P\right)$ و $\left(ABC\right)$ هو المستقيم $\left(\Delta\right)$ المعرف بتمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=t-1 \\ y=4t \\ z=5t \end{cases}$ حيث t وسيط حقيقي

ج- احسب المسافة بين النقطة $H\left(-1;6;-2\right)$ والمستوي $\left(ABC\right)$ ثم بين أن المسافة بين H والمستقيم $\left(\Delta\right)$ تساوي $\sqrt{\frac{106}{3}}$.

3) لتكن $\left(\Gamma\right)$ مجموعة النقط $M\left(x;y;z\right)$ من الفضاء حيث: $x^2+y^2+z^2+2x-12y+4z+3=0$

أ-بين أن $\left(\Gamma\right)$ هي سطح كرة مركزها H يطلب تعيين نصف قطرها.

ب-ما هو الوضع النسبي للمجموعة $\left(\Gamma\right)$ و المستقيم $\left(\Delta\right)$؟

التمرين الرابع : (7 نقط) I) لتكن الدالة g المعرفة على R بـ: $g\left(x\right)=\frac{x}{2}-1+2e^{\frac{x}{2}}$

أ-ادرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

ب-بين أن المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث: $-0,8<\alpha<-0,7$. استنتج إشارة $g\left(x\right)$ حسب قيم x

.

II) لتكن الدالة f المعرفة على ℝ بـ: $f\left(x\right)=2x-1-xe^{-\frac{x}{2}}$

و ليكن $\left(C\right)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أ- بين أن $\lim_{x\to-\infty}f\left(x\right)=+\infty$ ثم احسب $\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)$.

ب- بين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للمنحني $\left(C\right)$.

ج- ادرس وضعية $\left(C\right)$ بالنسبة إلى $\left(\Delta\right)$.

2) أ-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'\left(x\right)=e^{-\frac{x}{2}}g\left(x\right)$

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- عين معادلة المماس $\left(T\right)$ للمنحني $\left(C\right)$ عند النقطة التي فاصلتها 2.

3) أنشئ $\left(T\right)$، $\left(\Delta\right)$ و $\left(C\right)$. (تؤخذ $f\left(\alpha\right)\approx-1,4$)

4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f\left(x\right)=2x+m$

5) أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_{\alpha}^{0}xe^{-\frac{x}{2}}dx=\left(2\alpha+4\right)e^{-\frac{\alpha}{2}}-4$.

ب- استنتج المساحة $A\left(\alpha\right)$ ، بدلالة α ، لحيز المستوي المحدد بالمنحني $\left(C\right)$، المستقيم $\left(\Delta\right)$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=\alpha$ و $x=0$. بين أن: $A\left(\alpha\right)=-4\left(\frac{3\alpha+2}{2-\alpha}\right)u\,a$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (5 نقاط) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة ℂ، المعادلة ذات المجهول Z : $Z^2+Z+1=0$

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D و F ذات اللاحقات: $Z_A=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $Z_B=\overline{Z_A}$ ، $Z_C=-2$ ، $Z_D=-2+2\sqrt{3}i$ و $Z_F=\overline{Z_D}$ على الترتيب .

أ- أكتب Z_A و Z_B على الشكل المثلثي ثم علم النقط A ، B ، C ، D و F .

ب- ما طبيعة المثلث ABC ؟

3) ليكن R الدوران الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' التي لاحقتها Z' حيث:

$$Z'+2=e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(Z+2\right)$$

أ - عين مركزه وزاوية الدوران R .

ب- لتكن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R . علم النقطة E ثم بين أن لاحقتها هي: $Z_E=1+\sqrt{3}i$

ج- اكتب العدد $\frac{Z_F-Z_E}{Z_D-Z_E}$ على الشكل الجبري ثم استنتج أن المستقيمين $\left(ED\right)$ و $\left(EF\right)$ متعامدان.

4) لكل عدد مركب Z يختلف عن E ، نرفق العدد المركب Z' حيث: $Z'=\frac{Z-Z_C}{Z-Z_E}$

لتكن $\left(\Gamma_1\right)$ مجموعة النقط M ذات اللواحق Z بحيث يكون Z' عددا تخيليا صرفا. عين وأنشئ المجموعة $\left(\Gamma_1\right)$.

5) أ- لتكن G مرجح الجملة $\left\{\left(A,\left|Z_A\right|\right);\left(B,\left|Z_B\right|\right);\left(C,\left|Z_C\right|\right)\right\}$ حدد Z_G لاحقة النقطة G .

ب- $\left(\Gamma_2\right)$ هي مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\|$.

– تحقق أن C تنتمي إلى $\left(\Gamma_2\right)$ ثم عين طبيعة المجموعة $\left(\Gamma_2\right)$.

التمرين الثاني: (4 نقاط) الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. نعتبر النقط $A\left(-2;-1;3\right)$ ، $B\left(1;3;5\right)$ ، $C\left(2;-\frac{1}{2};-4\right)$ و $D\left(2;-2;-3\right)$ والمستقيم $\left(\Delta\right)$ المعرف بتمثيله الوسيطي: $\begin{cases}x=1+\alpha\\ y=-2\alpha\\ z=3-6\alpha\end{cases}$ ،

حيث α وسيط حقيقي.

1) أ- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم $\left(AB\right)$.

ب-بين أن $\left(\Delta\right)$ و $\left(AB\right)$ ليسا من نفس المستوي.

2) $\left(P\right)$ هو المستوي الذي يوازي $\left(\Delta\right)$ ويشمل $\left(AB\right)$.

أ-بين أن الشعاع $\vec{n}\left(2;-2;1\right)$ ناظمي للمستوي $\left(P\right)$.

ب- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي $\left(P\right)$.

ج-بين أن المسافة بين نقطة كيفية M من $\left(\Delta\right)$ والمستوي $\left(P\right)$ مستقلة عن موضع M.

3) أ-تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم $\left(\Delta\right)$ و أن النقطة C تنتمي إلى المستوي $\left(P\right)$.

ب- بين أن المثلث ABC قائم في A واحسب مساحته.

ج- احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.

التمرين الثالث : (4 نقاط) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1;2]$ كما يلي: $f(x)=\frac{2-2x}{x-3}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. الوحدة: $2cm$

1) أ- ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[-1;2]$.

ب- استنتج انه إذا كان $x\in[-1;2]$ فإن $f(x)\in[-1;2]$.

2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفةبـِ: $u_0=\frac{3}{2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ- استعمل المنحني (C) والمستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ لتمثيل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n) دون حسابها. ب- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)وتقاربها.

3) أ- برهن بالتّراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $-1<u_n<2$.

ب-بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما. ماذا تستنتج؟

4) نعتبر المتتالية (v_n)المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-2}$.

أ-بين أن المتتالية (v_n)هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأو ل.

ب- اكتب v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

I)لتكن الدّالة g المعرفّة على $]0;+\infty[$ بـِ: $g(x)=-x^3+1-2\ln x$

1) ادرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدّالة f المعرفّة على $]0;+\infty[$ بـِ: $f(x)=4-3x+\frac{3\ln x}{x^2}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$حيث: $\|\vec{i}\|=2\ cm$ و $\|\vec{j}\|=1\ cm$

1) أ- بين ّ أن: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)=-\infty$.فسر النتيجة بيانيا. ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ج- بين أن ّالمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=4-3x$ مقارب للمنحني (C)، ادرس وضعية (C)بالنّسبة إلى (Δ).

2) أ- بين أنه من أجل كلعدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{3g(x)}{x^3}$

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاّ واحداً β حيث : $1,5<\beta<1,6$.

3) أنشئ (Δ) و (C).

4) أ- لتكن الدّالة H المعرفة على $]0;+\infty[$ بـِ: $H(x)=-\frac{1+\ln x}{x}$ بين أن ّ H أصلية للدالة $h:x\mapsto\frac{\ln x}{x^2}$ على $]0;+\infty[$

ب- احسب بالسنتيمتر المربع، المساحة Aلحيز المستوي المحد ّد بالمنحني (C)، المستقيم (Δ)والمستقيم الذي معادلته $x=e$.

الشعبة: علوم تجريبية+رياضيات

تحضير للبكالوريا 2015
دورة: ماي 2015

اختبار في مادة : الرياضيات

المدة: 3 ساعات ونصف

التصحيح النموذجي للموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=-6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2n-1$

1) أ – حساب u_1 ، u_2 و u_3 : ...... (0,75 ن)

$u_1=-4$ ، $u_2=-1$ ، $u_3=\frac{5}{2}$

ب – برهن أنه من أجل كل $n\geq 3$ ، $u_n>0$ .... (0,75 ن)

– نسمي $p(n)$ الخاصية: $u_n>0$

– من أجل $n=3$: $u_3=\frac{5}{2}$ و $\frac{5}{2}>0$ أي $u_3>0$

– نفرض أنه من أجل كل $n\geq 3$ ، $u_n>0$ ونبرهن ان $u_{n+1}>0$

$u_n>0$ ومنه $\frac{1}{2}u_n>0$

$n\geq 3$ ومنه $2n\geq 6$ ومنه $2n-1\geq 5$

إذن $\frac{1}{2}u_n+2n-1>0$ أي $u_{n+1}>0$

ج – استنتج أنه من أجل كل $n\geq 4$ ، $u_n\geq 2n-3$ ....(0,25ن)

– إذا كان $n\geq 3$ فإن $u_n>0$

ومنه – إذا كان $n\geq 4$ فإن $u_{n-1}>0$

ومنه $\frac{1}{2}u_{n-1}>0$ ومنه $\frac{1}{2}u_{n-1}+2n-3>2n-3$

أي: $u_n>2n-3$

د – نهاية المتتالية (u_n) ...... (0,5 ن)

بما أن $u_n\geq 2n-3$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}2n-3=+\infty$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

2) أ – البرهان أن (v_n) متتالية هندسية...... (0,75 ن)

$v_n=u_n-4n+10$

$$v_{n+1}=u_{n+1}-4(n+1)+10$$
$$=\frac{1}{2}u_n+2n-1-4n-4+10$$
$$=\frac{1}{2}u_n-2n+5$$
$$=\frac{1}{2}(u_n-4n+10)=\frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$v_0=u_0+10=-6+10=4$$

ب – تبيين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=2^{2-n}+4n-10$

$$v_n=v_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=4\left(\frac{1}{2}\right)^n=2^{2-n}$$

$u_n=v_n+4n-10=2^{2-n}+4n-10$ ...... (0,5 ن)

ج – حساب S_n حيث : $S_n=u_0+u_1+......+u_n$

نضع: $w_n=4n-10$ ، لدينا: $u_n=v_n+w_n$

$$S_n=(v_0+w_0)+......+(v_n+w_n)$$
$$S_n=(v_0+.....+v_n)+(w_0+......+w_n)$$
$$S_n=v_0\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}+\frac{n+1}{2}(w_0+w_n)$$

$S_n=-8\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]+(n+1)(2n-10)$ ......(0,5 ن)

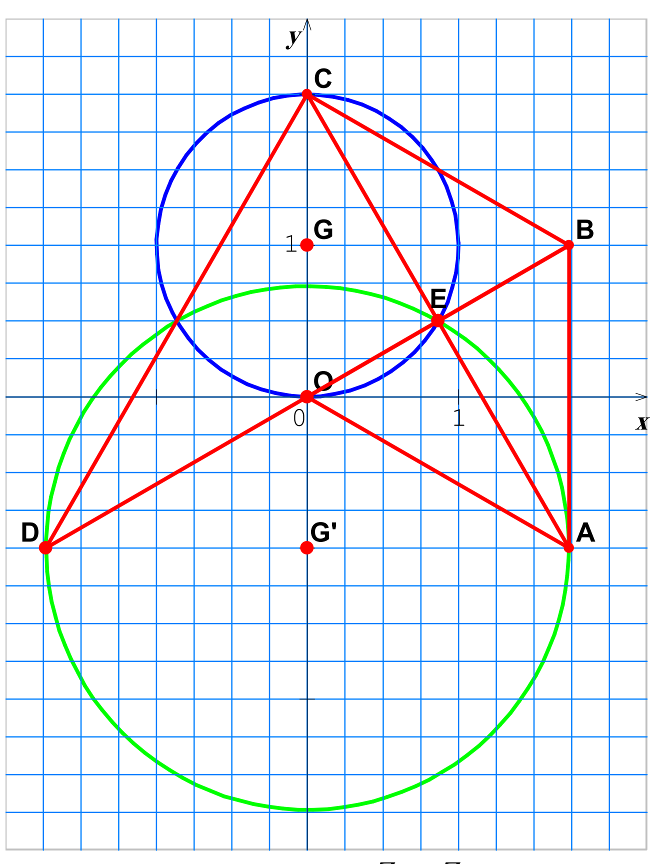
التمرين الثاني : (5 نقط)

1) مجموعة حلول المعادلة $\{\sqrt{3}-i\,;\sqrt{3}+i\,;2i\}$ .....(0,75 ن)

2) $z_A=\sqrt{3}-i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$ ، $z_C=2i$

و $z_D=-\sqrt{3}-i$

أ– تعليم النقط A ، B ، C و D : ..... (0,5 ن)



ب− كتابة العدد $\dfrac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسي واستنتاج طبيعة المثلث ABC ...... (0,75 ن)

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i}{2i - \sqrt{3} - i}$$

$$= \frac{-2i}{-\sqrt{3} + i} = \frac{-2i\left(-\sqrt{3} - i\right)}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

الشكل الأسي: $\dfrac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\left|\dfrac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}\right| = 1$ و $Arg\left(\dfrac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$ أي $AB = BC$

$\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$ ، إذن المثلث ABC متساوي الساقين

ج- تبيين أن العدد $\left(\dfrac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}\right)^{2010}$ حقيقي: .... (0,25ن)

$$\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}\right)^{2010} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2010} = e^{i\frac{2\pi}{3}\times 2010} = e^{i1340\pi} = 1$$

د− التحقّق أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها: ...... (0,5 ن)

$$|Z_A| = |Z_B| = |Z_C| = |Z_D| = 2$$

ومنه $OA = OB = OC = OD = 2$

إذن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2.

3) أ - تعيين النسبة والزاوية و مركز التشابه المباشر S الذي يحول O إلى A ويحول C إلى D . ... (0, 5 ن)

الكتابة المركبة للتشابه من هي: $Z' = \alpha Z + \beta$

$S(O) = A$ معناه $Z_A = \alpha Z_O + \beta = \beta = \sqrt{3} - i$

$S(C) = D$ معناه $Z_D = \alpha Z_C + \beta$ ومعناه

$$\alpha = \frac{Z_D - \beta}{Z_C} = \frac{-\sqrt{3} - i - \sqrt{3} + i}{2i} = \frac{-2\sqrt{3}}{2i} = \sqrt{3}i$$

إذن: $Z' = \sqrt{3}i\,Z + \sqrt{3} - i$ هي الكتابة المركبة للتشابه S .

لدينا: $\left|\sqrt{3}i\right| = \sqrt{3}$; $Arg\left(\sqrt{3}i\right) = \dfrac{\pi}{2}$

ومنه نسبة التشابه هي $\sqrt{3}$ وزاويته هي $\dfrac{\pi}{2}$

لاحقة مركزه هي:

$$Z_\Omega = \frac{\beta}{1 - \alpha} = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - \sqrt{3}i}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3} - i\right)\left(1 + \sqrt{3}i\right)}{4} = \frac{\sqrt{3} + 3i - i + \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

إذن: مركز التشابه هو: $\Omega\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$

ب - التحقّق أن صورة B بالتشابه S هي C. .... (0,25ن)

لدينا: $\sqrt{3}i\,z_B + \sqrt{3} - i = \sqrt{3}i\left(\sqrt{3} + i\right) + \sqrt{3} - i = 2i = z_C$

ومنه $S(B) = C$

4) أ- لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B و C المرفقة بالمعاملات 1 ، -1 و 2 على الترتيب.

تعيين احداثيتي النقطة G . .... (0,25ن)

$$Z_G = \frac{Z_A - Z_B + 2Z_C}{2} = \frac{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i + 4i}{2} = i$$

إذن: $G(0;1)$

ب – تعيين طبيعة المجموعة: ...... (0,5 ن)

$$MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 2MG^2 + GA^2 - GB^2 + 2GC^2$$

$$GA^2 = |Z_A - Z_G|^2 = \left|\sqrt{3} - 2i\right|^2 = 7$$

$$GB^2 = |Z_B - Z_G|^2 = \left|\sqrt{3}\right|^2 = 3$$

$$GC^2 = |Z_C - Z_G|^2 = |i|^2 = 1$$

$M \in (\Gamma)$ معناه $2MG^2 + GA^2 - GB^2 + 2GC^2 = 8$

ومعناه $2MG^2 + 7 - 3 + 2 = 8$ ومعناه $2MG^2 = 2$ ومعناه $MG = 1$

إذن المجموعة (Γ) هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 1.

ج- صورة المجموعة (Γ) بالتشابه S : .... (0,25ن)

صورة (Γ) بالتشابه S هي الدائرة التي مركزها $G'=S(G)$ ونصف قطرها $\sqrt{3}$

لدينا: $Z_{G'}=\sqrt{3}iZ_G+\sqrt{3}-i=\sqrt{3}i(i)+\sqrt{3}-i=-i$

ومنه $G'(0;-1)$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

$A(1;0;2)$، $B(0;1;2)$، $C(1;-2;0)$ والمستوي (P) الذي معادلته $3x-2y+z+3=0$.

1) أ - تبيين أنّ النقط A، B و C تعين مستويا (ABC) ... (0,5 ن)

$\overrightarrow{AB}(-1;1;0)$ ، $\overrightarrow{AC}(0;-2;-2)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيا وبالتالي النقط A، B و C تعين مستويا (ABC).

ب- التحقق أنّ الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثمّ استنتاج معادلة ديكارتية له: ..... (0,5 ن)+ (0,5 ن)

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=(-1\times1)+(1\times1)+(-1\times0)=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=(0\times1)+(-2\times1)+(-2\times-1)=-2+2=0$

إذن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC)

معادلة (ABC) : $x+y-z+d=0$

$A\in(ABC)$ معناه $1+0-2+d=0$ ومعناه $d=1$

وبالتالي معادلة المستوي (ABC) هي $x+y-z+1=0$

2) أ- تبيين أنّ المستويين (P) و (ABC) متعامدان: ..... (0,5 ن)

$\overrightarrow{n_P}(3;-2;1)$ هو الشعاع الناظمي للمستوي (P)

و $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC)

$\overrightarrow{n_P}.\vec{n}=(3\times1)+(-2\times1)+(-1\times1)=0$

ومنه $(ABC)\perp(P)$

ب- تبيين أنّ تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ) المعرّف بتمثيله الوسيطي

$$\begin{cases}x=t-1\\ y=4t\\ z=5t\end{cases}$$ ..... (0,5 ن)

لدينا: $3(t-1)-2(4t)+(5t)+3=0$ ومنه $(\Delta)\subset(P)$

و $(t-1)+(4t)-(5t)+1=0$ ومنه $(\Delta)\subset(ABC)$

ج- حساب المسافة بين النقطة $H(-1;6;-2)$ و (ABC) ثم تبيين أنّ المسافة بين H والمستقيم (Δ) تساوي $\sqrt{\frac{106}{3}}$ .... (0,75 ن)

$$d(H,(ABC))=\frac{|-1+6+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{3}}$$

$$d(H,(P))=\frac{|3(-1)-2\times6-2+3|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

$$d^2(H,(\Delta))=d^2(H,(ABC))+d^2(H,(P))$$

$$=\frac{64}{3}+14=\frac{42+64}{3}=\frac{106}{3}$$

ومنه $d(H,(\Delta))=\sqrt{\frac{106}{3}}$

3) أ– لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $x^2+y^2+z^2+2x-12y+4z+3=0$ .... (1)

أ- تبيّن أنّ (Γ) هي سطح كرة مركزها H يطلب تعيين نصف قطرها: ..... (0,5 ن)

(1) تكافئ $(x+1)^2-1+(y-6)^2-36+(z+2)^2-4+3=0$

وتكافئ $(x+1)^2+(y-6)^2+(z+2)^2=38$

إذن (Γ) هي سطح كرة مركزها H و نصف قطرها $R=\sqrt{38}$

ب–و الوضع النّسبي للمجموعة (Γ) و المستقيم (Δ):.. (0,25ن)

$d(H,(\Delta))=\sqrt{\frac{106}{3}}$ و $\sqrt{\frac{106}{3}}<\sqrt{38}$ أي $d(H,(\Delta))<R$

وبالتالي المستقيم (Δ) يقطع سطح الكرة (Γ) في نقطتين.

التمرين الرابع : (7 نقط)

I) g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=\frac{x}{2}-1+2e^{\frac{x}{2}}$

1) أ- دراسة تغيّرات الدّالة g وتشكيل جدول تغيراتها....(0,75 ن)

$$g'(x)=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}+e^{\frac{x}{2}}$$

من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x)>0$

وبالتالي الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ α $+\infty$
$g'(x)$	+
$g(x)$	↗ 0 ↗

ب- بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث: $-0,8<\alpha<-0,7$:..... (0,5 ن)

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $[-0,8;-0,7]$

$g(-0,8)\simeq-0,06$ و $g(-0,7)\simeq0,06$

ومنه $g(-0,8)\times g(-0,7)<0$

وبالتالي المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحداً α حيث: $-0,8<\alpha<-0,7$.

ج- استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x : .... (0,5 ن)

إذا كان $x<\alpha$ فإن $g(x)<0$ و إذا كان $x>\alpha$ فإن $g(x)>0$

II) f دالة معرفة على ℝ بـ: $f(x)=2x-1-xe^{-\frac{x}{2}}$

1) أ- تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

.... (0,5 ن) + (0,5 ن)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2x-1-xe^{-\frac{x}{2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\left(2-\frac{1}{x}-e^{-\frac{x}{2}}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x-1=+\infty$$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\left(-\frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}=0$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ب- تبيين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب للمنحنى (C) . .... (0,5 ن)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(2x-1)=\lim_{x\to+\infty} -xe^{-\frac{x}{2}}=0$$

إذا المستقيم (Δ) مقارب لـ (C) عند $+\infty$

ج- دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) . .... (0,5 ن)

$$f(x)-(2x-1)=-xe^{-\frac{x}{2}}$$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$	
$f(x)-(2x-1)$	+ 0	−
الوضعية	(C) أعلى (Δ)	(C) أسفل (Δ)

(C) و (Δ) يتقاطعان في النقطة التي احداثياها $(0;-1)$

2) أ- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$f'(x)=e^{-\frac{x}{2}}g(x)$ .... (0,5 ن)

$$f'(x)=2-\left(e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}xe^{-\frac{x}{2}}\right)$$

$$f'(x)=2-e^{-\frac{x}{2}}\left(1-\frac{1}{2}x\right)$$

$$f'(x)=e^{-\frac{x}{2}}\left(2e^{\frac{x}{2}}-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right)=e^{-\frac{x}{2}}g(x)$$

ب- تشكيل جدول تغيرات الدالة f : .... (0,25 ن)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$

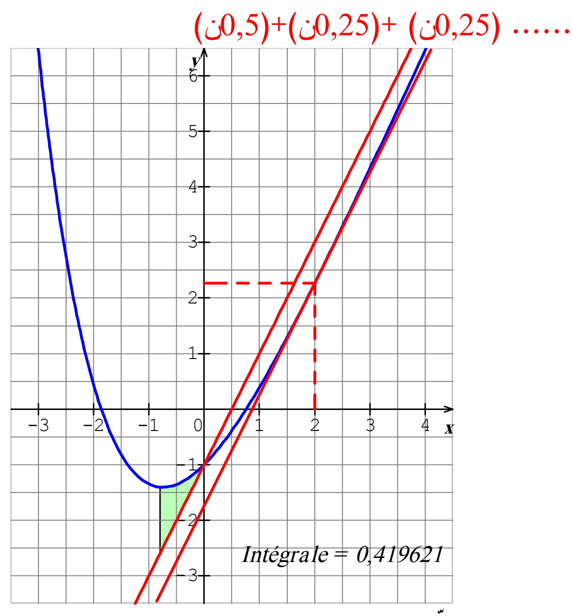
ج- تعيين معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 2. .... (0,25 ن)

$$(T): y=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$f'(2)=2$ و $f(2)=3-\frac{2}{e}$ ومنه $(T): y=2x-1-\frac{2}{e}$

3) إنشاء المماس (T) ، المقارب (Δ) والمنحنى (C) :

...... (0,25ن) +(0,25ن)+ (0,5ن)



4) مناقشة بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$f(x)=2x+m$ ...... (0,25ن)

– إذا كان: $m<-1-\frac{2}{e}$ فإن المعادلة ليس لها حل.

– إذا كان: $m=-1-\frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا.

– إذا كان: $-1-\frac{2}{e}<m<-1$ فإن المعادلة تقبل حلين.

– إذا كان: $m\geq-1$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا.

5) أ– باستعمال المكاملة بالتجزئة، تبيين أن:

$\int_{\alpha}^{0} xe^{-\frac{x}{2}}dx=(2\alpha+4)e^{-\frac{\alpha}{2}}-4$ .... (0,5 ن)

نضع: $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=-2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases}$

$$\int_{\alpha}^{0} xe^{-\frac{x}{2}}dx=\left[-2xe^{-\frac{x}{2}}\right]_{\alpha}^{0}-\int_{\alpha}^{0}-2e^{-\frac{x}{2}}dx$$

ومنه $\int_{\alpha}^{0} x e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[-2xe^{-\frac{x}{2}} - 4e^{-\frac{x}{2}}\right]_{\alpha}^{0}$

ومنه $\int_{\alpha}^{0} x e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[(-2x-4)e^{-\frac{x}{2}}\right]_{\alpha}^{0}$

ومنه $\int_{\alpha}^{0} x e^{-\frac{x}{2}} dx = \left[(-2x-4)e^{-\frac{x}{2}}\right]_{\alpha}^{0}$

ومنه $\int_{\alpha}^{0} x e^{-\frac{x}{2}} dx = (2\alpha+4)e^{-\frac{\alpha}{2}} - 4$

ب– استنتاج المساحة $A(\alpha)$: ...... (0,25ن)

$$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} [f(x) - (2x-1)]dx = \int_{\alpha}^{0} -x e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$A(\alpha) = \left[4 - (2\alpha+4)e^{-\frac{\alpha}{2}}\right] u.a$$

نستعمل الشرط $g(\alpha) = 0$ فنجد : $\frac{4}{2-\alpha} = e^{-\frac{\alpha}{2}}$

وبتعويضه نجد $A(\alpha) = -4\left(\frac{3\alpha+2}{2-\alpha}\right) u.a$ ..... (0,25ن)

التصحيح النموذجي للموضوع الثاني

التمرين الأول : (5 نقاط)

1) حل في ℂ، المعادلة: $z^2 - z + 1 = 0$

للمعادلة حلين هما : $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ...... (0,75ن)

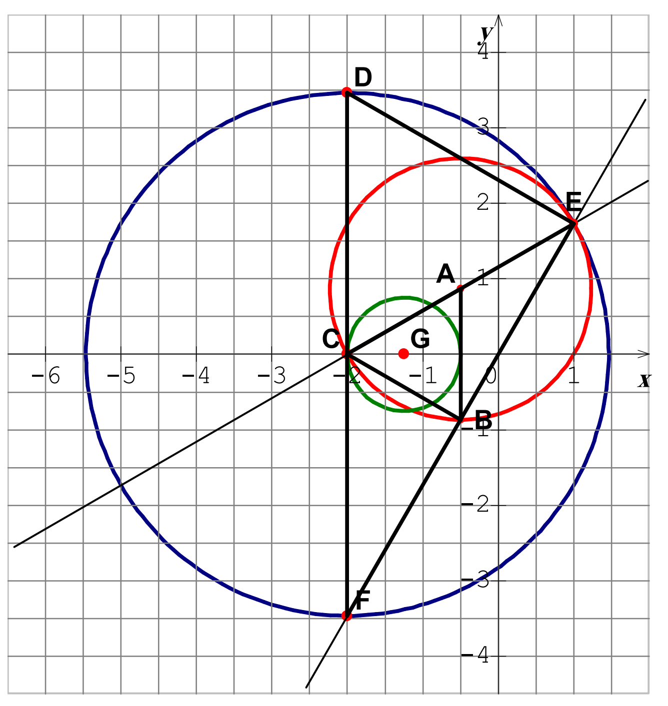
2) $z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -2$ ،

$z_D = -2 + 2\sqrt{3}i$ و $z_F = \overline{z_D}$

أ–كتابة z_A و z_B على الشكل المثلثي ثم علِّم النقط A ، B ، C ، D و F. ...... (0,75ن)

$$z_A = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_B = \cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$



ب– طبيعة المثلث ABC : ...... (0,25ن)

$AB = AC = BC = \sqrt{3}$ ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع

3) ليكن R الدوران الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z

النقطة M' التي لاحقتها z' حيث: $z'+2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z+2)$

أ – تعيين مركزه وزاوية الدوران R . ... (0,5ن)

مركز الدوران R هو النقطة ذات اللاحقة -2 أي النقطة C

وزاويته $-\frac{\pi}{3}$

ب– لتكن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R . تعليم النقطة E ثم

تبيان أن لاحقتها هي: $Z_E = 1 + \sqrt{3}i$ ...... (0,5ن)

$$Z_E + 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(Z_D + 2)$$

ومنه $Z_E = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-2 + 2\sqrt{3}i + 2\right) - 2$

ومنه $Z_E = 1 + \sqrt{3}i$

ج – كتابة $\frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E}$ على الشكل الجبري: ...... (0,5ن)

$$\frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i}{-2 + 2\sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i}$$

$$\frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = \frac{-3 - 3\sqrt{3}i}{-3 + \sqrt{3}i}$$

$$\frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = \frac{(-3 - 3\sqrt{3}i)(-3 - \sqrt{3}i)}{12}$$

$$\frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = \frac{12\sqrt{3}i}{12} = \sqrt{3}i$$

ومنه $\frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = \sqrt{3}i = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\left(\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EF}\right) = \frac{\pi}{2}$

نستنتج أن المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان. ...... (0,25ن)

4) لكل عدد مركب Z يختلف عن E ، نرفق العدد المركب Z'

حيث: $Z' = \frac{Z - Z_C}{Z - Z_E}$

تعيين وإنشاء المجموعة (Γ_1):...... (0,5ن) +(0,25ن)

$M \in (\Gamma_1)$ معناه Z' عددا تخيلي صرف

ومعناه $Arg(Z') = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ و $Z \neq Z_C$

ومعناه $Arg\left(\frac{Z - Z_C}{Z - Z_E}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ و $Z \neq Z_C$

ومعناه $\left(\overrightarrow{ME},\overrightarrow{MC}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ و $Z \neq Z_C$

– إذا كان $Z = Z_C$ فإن $Z' = 0$ وهو تخيلي صرف

إذا مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[EC]$ باستثناء النقطة E.

5) أ– لتكن G مرجح الجملة $\left\{(A,|Z_A|);(B,|Z_B|);(C,|Z_C|)\right\}$.

تحديد Z_G لاحقة النقطة G : ...... (0,25ن)

لدينا: $|Z_A| = |Z_B| = 1$ و $|Z_C| = 2$

$$Z_G = \frac{Z_A + Z_B + 2Z_C}{1+1+2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - 4}{4}$$

ومنه $Z_G = \frac{-5}{4}$

ب– التحقق أن C تنتمي إلى (Γ_2) ثم تعيين طبيعة المجموعة (Γ_2). ...... (0,5ن)

لدينا: $\left\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CC}\right\| = \left\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{CC}\right\|$

ومنه $C \in (\Gamma)$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (1+1+2)\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MG}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CI}$ حيث I منتصف $[AB]$

$M \in (\Gamma)$ معناه $4MG = 2CI$ ومعناه $MG = \frac{CI}{2}$

إذا : (Γ) هي الدائرة التي مركزها G وتشمل C .

التمرين الثاني: (4 نقاط)

$A(-2;-1;3)$ ، $B(1;3;5)$ ، $C\left(2;-\frac{1}{2};-4\right)$

و $D(2;-2;-3)$ ، (Δ) : $\begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -2\alpha \quad ; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = 3 - 6\alpha \end{cases}$

1) أ– تعيين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) : ..... (0,5ن)

لدينا $\overrightarrow{AB}(3;4;2)$

تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) هو: . $\begin{cases} x = -2+3t \\ y = -1+4t \; ; t \in \mathbb{R} \\ z = 3+2t \end{cases}$

ب– تبيين أن (Δ) و (AB) ليسا من نفس المستوي: ..... (0,75ن)

شعاع توجيه (Δ) هو $\vec{u}(1;-2;-6)$

شعاع توجيه (AB) هو $\overrightarrow{AB}(3;4;2)$

$\vec{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطيا وبالتالي (Δ) و (AB) غير متوازيان

فهما إما متقاطعان او إما ليسا من نفس المستوي

$\begin{cases} 1+\alpha = -2+3t \\ -2\alpha = -1+4t \\ 3-6\alpha = 3+2t \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} \alpha - 3t = -3 \\ -2\alpha - 4t = -1 \\ -3\alpha = t \end{cases}$

ومعناه $\begin{cases} 2\alpha - 6t = -6 \\ -2\alpha - 4t = -1 \\ -3\alpha = t \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} 10t = 7 \\ -2\alpha - 4t = -1 \\ -3\alpha = t \end{cases}$

ومعناه $\begin{cases} t = \frac{7}{10} \\ \alpha = \frac{-9}{10} \\ t = \frac{27}{10} \end{cases}$.إذن الجملة ليس لها حل وبالتالي (Δ) و (AB) ليسا من نفس المستوي.

2) أ– تبيين أن الشعاع $\vec{n}$ ناظمي للمستوي (P).....(0,25ن)

(P) هو المستوي الذي يوازي (Δ) ويشمل (AB) .

لدينا: $\vec{n}.\vec{u} = (2\times1) + (-2\times-2) + (1\times-6) = 0$

و $\vec{n}.\overrightarrow{AB} = (2\times3) + (-2\times4) + (1\times2) = 0$

وبالتالي $\vec{n}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

ب– استنتاج معادلة ديكارتية للمستوي (P) : ..... (0,5ن)

$(P): 2x - 2y + z + d = 0$

$A \in (P)$ معناه $2(-2) - 2(-1) + 3 + d = 0$ ومعناه $d = -1$

إذن معادلة ديكارتية للمستوي (P) هي $2x - 2y + z - 1 = 0$

ج–تبيين أن المسافة بين نقطة كيفية M من (Δ) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M. ..... (0,5ن)

$$d(M;(P)) = \frac{|2(1+\alpha) - 2(-2\alpha) + 1(3-6\alpha) - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}$$

$d(M;(P)) = \frac{4}{3}$. إذن المسافة بين نقطة كيفية M من (Δ) والمستوي (P) مستقلة عن M.

3) أ- تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) و أن النقطة C تنتمي إلى المستوي (P) ...... (0,25) +(0,25)

$D \in (\Delta)$ معناه $\begin{cases} 2 = 1+\alpha \\ -2 = -2\alpha \\ -3 = 3-6\alpha \end{cases}$ ومعناه $\begin{cases} 1 = \alpha \\ 1 = \alpha \\ 1 = \alpha \end{cases}$

تبيين أن النقطة $C\left(2;-\frac{1}{2};-4\right)$ تنتمي إلى المستوي (P)

لدينا: $2(2)-2\left(-\frac{1}{2}\right)-4-1 = 4+1-4-1 = 0$ ومنه $C \in (P)$

ب- تبيين أن المثلث ABC قائم في A وحساب مساحته. .... (0,5ن)

$\overrightarrow{AB}(3;4;2)$ ، $\overrightarrow{AC}\left(4;\frac{1}{2};-7\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$ ومنه المثلث ABC قائم في A

مساحة المثلث ABC هي: $S = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{87}{4}$

ج- حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$: .... (0,5ن)

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S \times d(D;(P))$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{87}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{29}{3} uv$$

التمرين الثالث : (4 نقاط)

f دالة معرفة على المجال $[-1;2]$ كما يلي: $f(x) = \frac{2-2x}{x-3}$

1) أ- ادراسة تغيرات الدالة f على المجال $[-1;2]$..... (0,5ن)

$f'(x) = \frac{4}{(x-3)^2}$ من أجل كل $x \in [-1;2]$: $f'(x) > 0$

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $[-1;2]$

ب- استنتاج انه إذا كان $x \in [-1;2]$ فإن $f(x) \in [-1;2]$ (0,25ن).

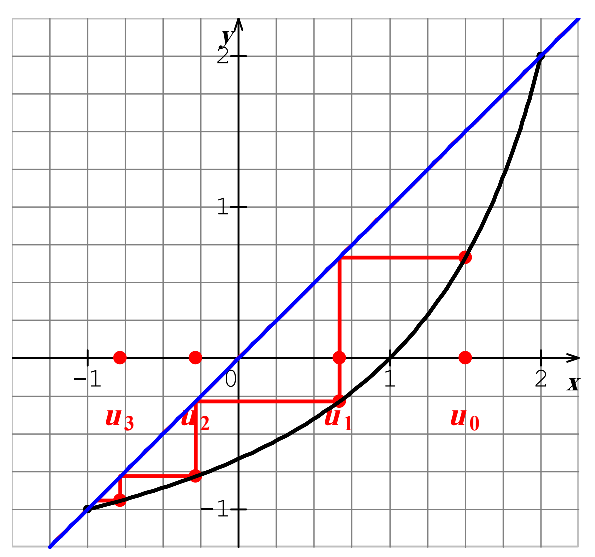
$x \in [-1;2]$ و f متزايدة تماما على $[-1;2]$

و منه $f(x) \in [f(-1);f(2)]$

$f(-1) = -1$ و $f(2) = 2$.إذا $f(x) \in [-1;2]$

2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ- إنشاء الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها. (0,5ن)



ب- التخمين: المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة . (0,25ن).

2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $-1 < u_n < 2$

..... (0,5ن)

نسمي $P(n)$ الخاصية: $-1 < u_n < 2$

- من أجل $n = 0$ لدينا: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $-1 < \frac{3}{2} < 2$

أي $-1 < u_0 < 2$

- نفرض أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 < u_n < 2$

ونبرهن أن $-1 < u_{n+1} < 2$

لدينا: $-1 < u_n < 2$ ومنه $f(-1) < f(u_n) < f(2)$

لأن الدالة f متزايدة تماما على $[-1;2]$

أي: $-1 < u_{n+1} < 2$

ب- تبيين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما. ..... (0,5ن)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2-2u_n}{u_n - 3} - u_n = \frac{2-2u_n - u_n^2 + 3u_n}{u_n - 3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n - 3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n - 3}$$

لدينا: $-1 < u_n < 2$ ومنه $0 < u_n + 1 < 3$ و $-3 < u_n - 2 < 0$

و $-4 < u_n - 3 < -1$

ومنه $-(u_n+1)(u_n-2) > 0$ و $u_n - 3 < 0$

ومنه $\frac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n-3} < 0$ أي $u_{n+1} - u_n < 0$

برهان آخر: لنبرهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما باستعمال البرهان بالتراجع ، نسمي $P(n)$ الخاصية التالية: $u_{n+1} < u_n$

الاستنتاج: بما أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد -1 ومتناقصة تماما فإنها متقاربة ......(0,25ن)

3) (v_n) متتالية حيث: $v_n=\frac{u_n+1}{u_n-2}$

4) أ- تبيين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول. ..... (0,5ن)

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-2}=\frac{\frac{2-2u_n}{u_n-3}+1}{\frac{2-2u_n}{u_n-3}-2}=\frac{2-2u_n+u_n-3}{2-2u_n-2u_n+6}$$

$$v_{n+1}=\frac{-u_n-1}{-4u_n+8}=\frac{-(u_n+1)}{-4(u_n-2)}=\frac{1}{4}v_n$$

$$v_0=\frac{u_0+1}{u_0-2}=\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{3}{2}-2}=-5$$

إذا المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_0=-5$

ب- كتابة v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .... (0,25ن)+ (0,25ن)+ (0,25ن)

$v_n=v_0\times\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{-5}{4^n}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

$v_n=\frac{u_n+1}{u_n-2}$ معناه $v_nu_n-2v_n=u_n+1$

ومعناه $v_nu_n-u_n=1+2v_n$ ومعناه $u_n(v_n-1)=1+2v_n$

ومعناه $u_n=\frac{1+2v_n}{v_n-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-1$ لأن $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

I) $g(x)=-x^3+1-2\ln x$

1) دراسة تغيرات الدالة g و تشكيل جدول تغيراتها: ..... (0,75ن)

$$g'(x)=-3x^2-\frac{2}{x}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $g'(x)<0$

وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	↘	0	↘

2) حساب $g(1)$ ثم استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x ....(0,75ن)

$g(1)=0$

إذا كان $0<x<1$ فإن $g(x)>0$

و إذا كان $x>1$ فإن $g(x)<0$

II) $f(x)=4-3x+\frac{3\ln x}{x^2}$

1) أ- تبيين أن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ . ... (0,5ن)

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 4-3x=4$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{3\ln x}{x^2}=-\infty$ (2

ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$

تفسير النتيجة بيانيا: .... (0,25ن)

تستنتج ان المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب للمنحنى (C)

ب- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .... (0,5ن)

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4-3x=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{x^2}=0$

ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

ج- تبيين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=4-3x$ مقارب للمنحنى (C) .... (0,5ن)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(4-3x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3\ln x}{x^2}=0$$

ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=4-3x$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$

– دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)......... (0,5ن)

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-(4-3x)$	$-$	0	$+$
الوضعية	(C) أسفل (Δ)		(C) أعلى (Δ)

(C) و (Δ) يتقاطعان في النقطة التي احداثياها $(1;1)$

2) أ- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$f'(x)=\frac{3g(x)}{x^3}$ .... (0,5ن)

$$f'(x)=-3+\frac{\frac{3}{x}x^2-2x(3\ln x)}{x^4}=-3+\frac{3x-6x\ln x}{x^4}$$

$$=\frac{-3x^3+3-6\ln x}{x^3}=\frac{3g(x)}{x^3}$$

ب- تشكيل جدول تغيرات الدالة f . ... (0,25ن)

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	1	↘ $-\infty$

ج- تبيين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث :

$1,5<\beta<1,6$ ....(0,5ن)

الدالة g مستمرة و رتيبة تماما على $[1,5;1,6]$

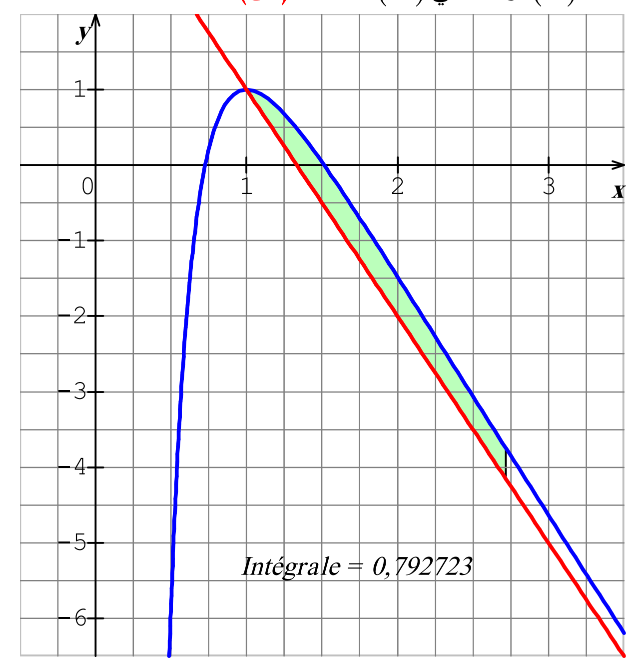
$f(1,5)\approx 0,04$ و $f(1,6)\approx -0,25$

ومنه $f(1,5)\times f(1,6)<0$

وبالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً واحداً β حيث :

$1,5<\beta<1,6$.

3) إنشاء (Δ) والمنحني (C). ......(1ن)



4) أ-تبيين أنّ الدالة H أصلية للدالة h على $]0;+\infty[$ ..... (0,5ن)

$$H'(x)=-\frac{\frac{1}{x}x-(1+\ln x)}{x^2}=-\frac{1-(1+\ln x)}{x^2}$$

$$=\frac{\ln x}{x^2}=h(x)$$

إذا الدالة H أصلية للدالة h على $]0;+\infty[$

ب- حساب المساحة A : .... (0,5ن)

$$A=\int_1^e[f(x)-(4-3x)]dx=\int_1^e\frac{3\ln x}{x^2}dx=\left[-3\frac{1+\ln x}{x}\right]_1^e$$

$$A=\left[-3\frac{1+\ln e}{e}\right]-\left[-3\frac{1+\ln 1}{1}\right]=\left(-\frac{6}{e}+3\right)u.a$$

$$A=2\left(-\frac{6}{e}+3\right)cm^2=6-\frac{12}{e}cm^2$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنيــــــــــــة — مديرية التربية لولاية المسيلة

امتحان البكالوريا التجريبية — ثانوية الشهيد بن ناعة السعيد

الشعبة: رياضيات، تقني رياضي — دورة مـــــــــاي 2011

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة:04 ساعات و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (3.5 ن) i العدد المركب الذي طويلته 1، و$\frac{\pi}{2}$ عمدة له.

/1 أحسب z_1، z_2 حلي المعادلة $z^2 - iz + 2 = 0 \dots\dots (1)$ في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، حيث: $|z_1| > |z_2|$.

/2 أكتب على الشكل المثلثي كلا من z_1، z_2، $\left(\frac{z_1}{2z_2}\right)^{47}$.

/3 النقط A، B، C صور z_1، z_2، $3 + 2i$ على التوالي.

ما هي عناصر التشابه المستوي المباشر الذي يحول B إلى A، و C إلىC؟

التمرين الثاني:(4.5 ن)

في Z مجموعة الأعداد الصحيحة نعتبر المعادلة $6x - 9y + 15 = 0 \dots\dots (1)$، ذات المجهولين x، y.

/1 هل تقبل (1) حلولا في Z^2؟

/2 لاحظ أن: $-5 = -3 - 2 -$، واستنتج حلا خاصا لـ(1) .

/3 حل(1) في Z^2.

/4 لتكن(x, y) حلول(1) الطبيعية، ونضع: $L = 1432^x - 2 \times 2011^{3y}$.

- أدرس باقي قسمة كل من 2^n، 4^n على 7، حسب قيم العدد الطبيعي n.
- بين أن: $L \equiv 0[7]$.

التمرين الثالث:(04 ن) u متتالية عددية تحقق من أجل كل n من N: $3u_{n+1} - 3 = 2u_n$.

/1 عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n، من اجل n كيفي من N.

/2 جد قيمة u_0 التي تجعل u ثابتة.

/3 نفرض في بقية هذا التمرين أن $u_0 = 4$، ونعرف المتتالية v بالعبارة: $u_n = v_n + 3$ من أجل كل n من N.

أ- أحسب الحدود: v_0، v_1، v_2.

ب- برهن أن v هندسية، واذكر أساسها.

ج - أكتب عبارتي الحدين العامين للمتتاليتين u، v بدلالة n.

د - أحسب المجموع S_n بدلالة n، ثم احسب $\lim_{n \to +\infty} S_n$ ، حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

التمرين الرابع:(08 ن)

نعتبر الدالة: $f: x \longmapsto x + lnx^2$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$، و(C) التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. حيث يدل الرمز ln إلى اللوغاريتم النيبيري.

① **/1** أحسب نهايات f عند أطراف مجالات تعريفها، وأدرس الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة لـ(C).

/2 أدرس اتجاه تغير f، وأنشئ جدول تغيراتها.

/3 ما هو الوضع النسبي لـ(C) مع المستقيم $(\Delta): y = x$؟

/4 بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}^*$، وبين أن: $0,6 < \alpha < 0,8$.

/5 أكتب معادلة لـ(T) مماس (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1-.

/6 أنشئ (T) و (C).

② **/1** جد دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty, 0[$. (يمكن استخدام المكاملة بالتجزئة).

/2 أحسب μ_t مساحة الحيز S المستوي المحدد بـ(C) ومحور الفواصل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين: $x = t$ ، $x = -2$ بدلالة t، حيث: $-2 < t < 0$.

/3 ما هي نهاية μ_t عندما يؤول t إلى الصفر؟ وما التفسير الهندسي لهذه النهاية؟

/4 أدرس شفعية الدالة: $g: x \longmapsto |x| + lnx^2$، واستنتج تمثيلها البياني في المستوي السابق.

③ نعتبر الآن المستوي مركبا، وليكن التحويل النقطي H المعرف بالعبارة المركبة التالية: $z' = iz$.

/1 تعرف على طبيعة وعناصر H .

/2 أنشئ في نفس المستوي السابق (C') صورة (C) بواسطة H.

(يُعطى: $ln(0,36) = -1$ ، $ln(0.64) = -0,4$، $ln(2) = 0,7$)

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 ن)

/1 حل المعادلة $(1) \ldots\ldots 6x + 2y - 18 = 0$، ذات المجهولين الصحيحين x، y.

/2 ما هي كل الثنائيات (x,y) حلول المعادلة السابقة، حيث x، y طبيعيان معا؟

/3 نفرض الآن أن y طبيعي، ولا يهمنا x، بين أن: $2011^y - 1 \equiv 0[7]$.

/4 α ، β، γ أعداد طبيعية غير معدومة، حيث يكتب γ في النظام ذي الأساس 5 هكذا: $4\alpha0$ ، وفي النظام ذي الأساس 4 هكذا: $1\alpha\beta\alpha$.   أكتب كل القيم الممكنة لـ γ في النظام العشري.

التمرين الثاني:(05 ن)

نعتبر الفضاء منسوبا إلى معلم متعامد ومتجانس، ولتكن النقط: $A(1,2,2)$، $B(3,2,1)$، $C(1,3,3)$ من الفضاء.

/1 بين أن النقط A، B، C تعين مستويا، واكتب معادلة ديكارتية له.

/2 باعتبار المستويين (P_1)، (P_2) التاليين: $(P_1): x - 2y + 2z - 1 = 0$، $(P_2): x - 3y + 2z + 2 = 0$،
بين أنهما يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)، وأن: $C \in (\Delta)$.

/3 برهن أن الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ(Δ)، واستنتج تمثيلا وسيطيا له.

/4 أحسب إحداثيات النقطة M من (Δ) حتى يتعامد الشعاع $\overrightarrow{AM}$ مع المستقيم (Δ)، واستنتج المسافة بين(Δ) و A.

التمرين الثالث:(04 ن)

نرمي زهرتي نرد غير مزيفتين، متماثلتين ومرقمة أوجه كل منهما من 1 إلى 6، في آن واحد، ونهتم بالرقمين الظاهرين على الوجهين العلويين.

/1 ما هو عدد كل الإمكانيات؟ أكتبها جميعا.

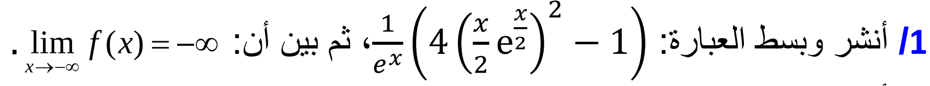
/2 ما احتمال أن يظهر أحد الرقمين على الأقل أكبر تماما من4؟

/3 نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق كل إمكانية مما مضى بمجموع الرقمين الظاهرين.

- عرف في جدول قانون احتمال المتغير X .
- أحسب احتمال أن نحصل على مجموع فردي.
- جد حادثة C تشكل مع الحادثتين $A = \{2,3,4,5,6\}$، $B = \{7,8,9,10\}$ تجزئة للمجموعة الكلية لقيم المتغير X ، ثم أحسب الاحتمال السابق باستخدام دستور الاحتمالات الكلية.
- أحسب الأمل الرياضياتي لـX .

التمرين الرابع:(07 ن)

نقبل أن التمثيل البياني المرفق هو للدالة: $h: x \longmapsto 2x + \frac{1}{e^x}$ على $\mathbb{R}$، ونعتبر الدالة: $f: x \longmapsto x^2 - \frac{1}{e^x}$ المعرفة على $\mathbb{R}$، و(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. حيث يدل الرمز e إلى أساس اللوغاريتم النيبيري.



/1 أنشر وبسط العبارة: $\frac{1}{e^x}\left(4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - 1\right)$، ثم بين أن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

/2 أدرس اتجاه تغير f، وشكل جدول تغيراتها.

/3 جد إحداثيتي نقطة الانعطاف لـ(C).

/4 أدرس الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة لـ(C).

/5 أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في R، وهو يحقق: $0,5 < \alpha < 0,8$، ثم بين أن: $h(\alpha) = \alpha(2 + \alpha)$.

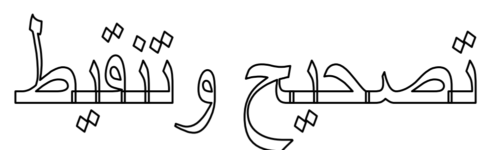
/6 هات أحسن تقريب تآلفي لـf بجوار الـ0.

/7 أنشئ (C)، و(Δ) مماسه عند النقطة $A(0,-1)$.

/8 أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ(C) ومحوري المعلم والمستقيم المعرف بالمعادلة: $x = -2$.

(يُعطـَى: $e^{-0,8} = 0,45$ ، $e^{-0,5} = 0,6$)

انتهى



موضوع امتحان البكالوريا التجريبية لثانوية الشهيد بن ناعة السعيد لشعبة رياضيات دورة ماي 2011

لمادة: الرياضيات

الصفحة 1 / 6

الموضوع الأول

التمرين الأول: (3.5 ن) i العدد المركب الذي طويلته 1، و$\frac{\pi}{2}$ عمدة له.

1/ حساب z_1، z_2 حلي المعادلة $z^2 - iz + 2 = 0 \dots\dots (1)$ حيث: $|z_1| > |z_2|$:

$\Delta = b^2 - 4ac = -9 = (3i)^2$، ومنه: $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{i+3i}{2} = 2i$ أي: $z_1 = 2i$، ونجد أيضا: $z_2 = -i$. **1 ن**

2/ كتابة على الشكل المثلثي لكل من z_1، z_2، $\left(\frac{z_1}{2z_2}\right)^{47}$: $z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i.\sin\frac{\pi}{2})$، $z_2 = \cos\frac{-\pi}{2} + i.\sin\frac{-\pi}{2})$،

ونجد: $\left(\frac{z_1}{2z_2}\right)^{47} = \left(\frac{2i}{-2i}\right)^{47} = (-1)^{47} = -1$، ومنه: $\left(\frac{z_1}{2z_2}\right)^{47} = \cos\pi + i.\sin\pi$. **3 ×(0.5 ن)**

3/ لدينا النقط A، B، C صور z_1، z_2، $3+2i$ على التوالي، ومنه: $A(0,2)$، $B(0,-1)$، $C(3,2)$:

ليكن $S: z' = az + b$ التشابه المستوي المباشر الذي يحول B إلى A، وC إلى C، يكون:

$3 + 2i = a(3+2i) + b$ و $2i = a(-i) + b$ فبالطرح نجد: $a = \frac{3}{3+3i}$ أي: $a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. إذا:

مركز هذا التشابه هو C ونسبته هي $\frac{1}{\sqrt{2}}$، وزاويته هي $-\frac{\pi}{4}$. **1 ن**

التمرين الثاني: (4.5 ن)

في Z مجموعة الأعداد الصحيحة نعتبر المعادلة $6x - 9y + 15 = 0 \dots\dots (1)$، ذات المجهولين x، y.

1/ قبول المعادلة $6x - 9y + 15 = 0 \dots\dots (1)$ حلولا في Z^2:

لدينا: (1) تكافئ $2x - 3y = -5$، وبما أن $PGCD(2,3) = 1$ و1يقسم 5 فإن (1) تقبل حلولا في Z^2. **0.5 ن**

2/ استنتاج حل خاص لـ(1): من $-2 - 3 = -5$ نلاحظ أن: $2 \times (-1) - 3 \times 1 = -5$ ومنه $(-1,1)$ حل لـ(1).

0.5 ن

3/ حل(1) في Z^2: $\begin{cases} 2x - 3y = -5 \\ 2 \times (-1) - 3 \times 1 = -5 \end{cases}$، إذا: $2(x+1) - 3(y-1) = 0$ أي:

$2(x+1) = 3(y-1)$ وبما أن $2\backslash(x+1)$ فإن: $2\backslash 3(y-1)$، ولكن 2 و3 أوليان فيما بينهما إذا حسب مبرهنة غوص فإن $2\backslash(y-1)$، وعليه يكون $y - 1 = 2k$ حيث $k \in Z$، أي: $k \in Z$ / $y = 2k+1$،

وبالتعويض في (1) نجد: $x = 3k - 1$، إذا حلول (1) في Z^2 هي الثنائيات: $(3k-1, 2k+1)$ مع العلم أن k عدد صحيح. **1.5 ن**

4/ x، y حلول (1) الطبيعية، و: $L = 1432^x - 2 \times 2011^{3y}$، دراسة باقي قسمة كل من 2^n، 4^n على 7:

بالتجريب نجد:

$2^0 \equiv 1[7]$، $2^1 \equiv 2[7]$، $2^2 \equiv 4[7]$، $2^3 \equiv 1[7]$ و $4^0 \equiv 1[7]$، $4^1 \equiv 4[7]$، $4^2 \equiv 2[7]$، $4^3 \equiv 1[7]$.

ومنه: إذا كان $n = 3k$ حيث k عدد صحيح، فإن باقي قسمة كل من 2^n، 4^n على 7 هو1.

وإذا كان $n = 3k+1$ حيث k عدد صحيح، فإن باقي قسمة 2^n، 4^n على 7 هو على الترتيب 2، 4.

وإذا كان $n = 3k+2$ حيث k عدد صحيح، فإن باقي قسمة 2^n، 4^n على 7 هو على الترتيب 4، 2. **1 ن**

تبيين أن $L \equiv 0[7]$: واضح أن $1432 \equiv 4[7]$ ومنه $1432^x = 1432^{3k-1} \equiv 4^{3k-1}[7]$ أي:

$1432^x \equiv 4^{3(k-1)+2}[7]$ أي: $1432^x \equiv 2[7] \dots\dots (1)$، هذا من جهة ومن جهة أخرى: $2011 \equiv 2[7]$ فيكون $2011^{3y} \equiv 2^{3y}[7]$ أي: $2011^{3y} \equiv 1[7] \dots\dots (2)$، من (1) و(2) نجد أن: $L \equiv 2 - 2[7]$ أي: $L \equiv 0[7]$. **1 ن**

التمرين الثالث: (04 ن) $3u_{n+1} - 3 = 2u_n$.

1/ التعبير عن u_{n+1} بدلالة u_n: مما سبق نجد: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$. **0.5 ن**

2/ إيجاد قيمة u_0 التي تجعل u ثابتة: تكون عندئذ كل الحدود مساوية لـu_0، ومنه: $u_0 = \frac{2}{3}u_0 + 1$، أي: $u_0 = 3$. **0.5 ن**

تربية أون لاين

3/ $u_0 = 4$، و: $u_n = v_n + 3$ ،

أ- حساب الحدود: v_0، v_1، v_2: نجد $v_n = u_n - 3$ ومنه:

$v_0 = u_0 - 3$ أي $v_0 = 1$، ونجد أيضا: $v_1 = \frac{2}{3}$، $v_2 = \frac{4}{9}$. **0.5 ن**

ب- برهان أن v هندسية، وذكر أساسها: $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}u_n - 2 = \frac{2}{3}(u_n - 3)$،

إذا: $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$، ومنه v هندسية أساسها هو: $\frac{2}{3}$. **1 ن**

ج- كتابة عبارتي الحدين العامين u_n، v_n: $v_n = v_0 q^n$، أي: $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$، $u_n = 3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n$. **0.5 ن**

د- حساب المجموع S_n، ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$: $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (3 + v_0) + (3 + v_1) + \cdots + (3 + v_n)$

إذا: $S_n = 3(n+1) + v_0 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$، ونجد: $S_n = 3(n+2) - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$. و $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n = +\infty$. **1 ن**

التمرين الرابع:(08 ن)

$f(x) = x + lnx^2$ ، $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

① 1/ حساب نهايات f، ودراسة الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة لـ(C):

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1 + \frac{lnx^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1 + 2\frac{ln|x|}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(1 - 2\frac{ln(-x)}{-x}\right)$ ، إذا:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، **0.5 ن** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$. **0.25 ن**

$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{lnx^2}{x}$، ومنه: $\begin{cases} \frac{f(x)}{x} = 1 + 2\frac{lnx}{x} & si\ \ x > 0 \\ \frac{f(x)}{x} = 1 - 2\frac{ln(-x)}{-x} & si\ \ x < 0 \end{cases}$، إذا: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ، و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ ، ونجد:

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to-\infty} lnx^2 = +\infty$ ، و: $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} lnx^2 = +\infty$ ، والخلاصة:

- محور التراتيب مستقيم مقارب لـ (C).
- لـ (C) فرعا قطع مكافئ في اتجاه المستقيم $(\Delta): y = x$، أحدهما في جوار$+\infty$ ، والآخر في جوار $-\infty$. **0.75 ن**

2/ دراسة اتجاه تغير f، وإنشاء جدول تغيراتها: f تقبل الاشتقاق على كل من مجالي تعريفها، حيث: $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2}$،

أي: $f'(x) = \frac{x+2}{x}$، **0.25 ن** إذا فيما يلي جدول التغيرات: **0.25 ن**

	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
	+	0	-		‖	+	
	-	↗		↘	-‖-	↗	+

3/ الوضع النسبي لـ(C) مع (Δ): ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$. لدينا:

$f(x) - x = lnx^2$، إذا:

$f(x) > x$ تكافئ $x^2 > 1$، ومنه النتيجة التالية:

(C) يقع فوق (Δ) على كل من المجالين $]-\infty, -1[$ ، $]1, +\infty[$. بينما يقع (Δ) فوق (C) على كل من المجالين $]-1, 0[$ ، $]0, 1[$. **0.5 ن**

4/ تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}^*$، وأن: $0,6 < \alpha < 0,8$: من خلال جدول التغيرات

وبملاحظة أن $2(ln2 - 1) < 0$ يتبين أن $f(x) = 0$ لا تقبل أي حل على المجال $]-\infty, 0[$ وأنها تقبل حلا α في $]0, +\infty[$، وبما أن f رتيبة عليه فالحل وحيد. وبالحساب نجد: $f(0,6) = -0,4$، و $f(0,8) = 0,4$ ، مما يعني أن:

$f(0,6) \times f(0.8) < 0$، وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن هذا الحل α يحقق: $0,6 < \alpha < 0,8$. **0.5 ن**

5/ كتابة معادلة لـ(T): $x_0 = -1$ ، $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$، أي: $(T): y = -1(x + 1) - 1$،

أي: $(T): y = -x - 2$. **0.5 ن**

6/ إنشاء (T) و (C): الإنشاء فيما يلي: **0.75 ن**

② 1/ إيجاد دالة أصلية لـf على المجال $]-\infty, 0[$: الدالة f مستمرة على هذا المجال فهي تقبل دالة أصلية عليه، نجد:

$$\int f(x)\,dx=\int(x+lnx^2)\,dx$$
$$=\int(x+2ln|x|)dx$$

أي: $\int f(x)\,dx=\int xdx+2\int ln|x|dx\ ...(1)$،

- وباعتبار:

$m(x)=ln|x|$، $t'(x)=1$ ، $m'(x)=\frac{1}{x}$، $t(x)=x$، وحسب قاعدة المكاملة بالتجزئة نجد:

$$\int ln|x|dx=xln|x|-\int x\frac{1}{x}dx$$
$=xln|x|-x+k$ حيث k ثابت حقيقي،

وبوضع $k=0$، يكون: $\int ln|x|dx=xln|x|-x\ .....(2)$.

من (1) و(2) مع ملاحظة أن x في المجال $]-\infty,0[$ نحصل على:

$\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}x^2+2(xln(-x)-x)$، أي: $\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}x^2-2x+2xln(-x)$، إذا الدالة:

$F:x\longmapsto\frac{1}{2}x^2-2x+2xln(-x)$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty,0[$. **1 ن**

(لاحظ أنه يمكن كتابة: $F:x\longmapsto\frac{1}{2}x^2-2x+xlnx^2$)

/2 حساب μ_t: $\mu_t=\left|\int_{-2}^{t}f(x)dx\right|=|[F(x)]_{-2}^{t}|$. ومنه: $\mu_t=|F(t)-F(-2)|$، أي:

$\mu_t=(6-2ln4)-\left(\frac{1}{2}t^2-2t+tlnt^2\right)$، أي: $\boxed{\mu_t=2(3-2ln2)-\left(\frac{1}{2}t^2-2t+tlnt^2\right)}$. **0.5 ن**

/3 نهاية μ_t والتفسير الهندسي: $\lim_{t\to0}\mu_t=2(3-2ln2)-0$ أي: $\boxed{\lim_{t\to0}\mu_t=6-4ln2}$. وهذا العدد هو مساحة الحيز المظلل في الشكل، حيث هو الحيز المحدد بـ(C) ومحوري المعلم والمستقيم المعرف بالمعادلة: $x=-2$. **0.5 ن**

/4 دراسة شفعية الدالة: $g:x\longmapsto|x|+lnx^2$ واستنتاج تمثيلها البياني: واضح أن $D_g=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$،

ومن أجل كل x من D_g يتحقق: $g(-x)=|-x|+ln\,(-x)^2=|x|+ln\,x^2=g(x)$، إذا هذه الدالة زوجية،

فتمثيلها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب في المعلم المتعامد،.......(1)

وأكثر من ذلك، لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$ يكون: $g(x)=f(x)$ إذا:

تمثيل هذه الدالة ينطبق عن (C) في المجال $]0,+\infty[$،................(2).

من (1) و(2) نتمكن من إنشاء(C_g). - أنظر الشكل - **0.75 ن**

③ نعتبر: $H:z'=iz$.

/1 التعرف على طبيعة وعناصر H : H تشابه مستو مباشر، مركزه النقطة الصامدة، ونسبته $|i|$، وزاويته $arg(i)$،

أي: هو دوران مركزه المبدأ O، وزاويته $\frac{\pi}{2}$. **0.5 ن**

/2 إنشاء (C') في نفس المستوى السابق: - أنظر الشكل - **0.5 ن**

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 ن)

/1 حل المعادلة (1) ... ... $6x+2y-18=0$: (1) تكافئ $3x+y=9$، ونجد أيضا: $3\times3+0=9$، بالطرح

نجد: $3(x-3)+y=0$ أي: $3(x-3)=-y$، ومنه يكون 3 قاسما لـy ، أي: $y=3k$ حيث k عدد صحيح.

ومنه: $3x+3k=9$، أي: $x=3-k$ ، إذن حلول هذه المعادلة هي: $\boxed{(3-k,3k)}$، حيث k عدد صحيح. **1 ن**

/2 ذكر الحلول(x,y) حيث x، y طبيعيان معا: إذا يكون: $3-k\geq0$ و $3k\geq0$، أي: $0\leq k\leq3$، أي:

$k\in\{0,1,2,3\}$ وبالتالي الحلول المطلوبة هي فقط: $(3,0)$، $(2,3)$، $(1,6)$، $(0,9)$. **1 ن**

/3 y طبيعي، تبيين أن: $2011^y-1\equiv0[7]$: لدينا: $2011\equiv2[7]$ ومنه: $2011^3\equiv2^3[7]$، أي:

$2011^3\equiv8[7]$، أي: $2011^3\equiv1[7]$، أي: $2011^{3k}\equiv1[7]$، أي: $2011^y\equiv1[7]$، ومنه:

$\boxed{2011^y-1\equiv0[7]}$. **1 ن**

/4 يكتب γ في النظام ذي الأساس 5 هكذا: $4\alpha0$ ، وفي النظام ذي الأساس 4 هكذا: $1\alpha\beta\alpha$.

كتابة كل القيم الممكنة لـ γ في النظام العشري: نجد: $\overline{1\alpha\beta\alpha}^4 = \overline{4\alpha0}^5$ مع العلم أن كلا من α و β أصغر تماما من4.
أي: $64 + 16\alpha + 4\beta + \alpha = 100 + 5\alpha + 0$ أي: $3\alpha + \beta = 9$، ومنه فإن قيم α و β هي نفسها قيم x، y و الطبيعية الواردة في السؤال 2/ مع مراعاة الشرط: α و β أصغر تماما من4.
أي: $(\alpha,\beta) = (3,0)$، أو $(\alpha,\beta) = (2,3)$، يعني أن: $\gamma = \overline{430}^5 = \overline{1303}^4$ أو $\gamma = \overline{420}^5 = \overline{1232}^4$. أي قيم γ الممكنة هي: 115، 110. **1 ن**

التمرين الثاني:(05 ن)

لدينا: $A(1,2,2)$، $B(3,2,1)$، $C(1,3,3)$.

1/ تبيين أن النقط A، B، C تعين مستويا، وكتابة معادلة ديكارتية له: نجد بالحساب: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$،
مركباتهما غير متناسبة بنفس النسبة، ومن ثمة فالشعاعان غير متوازيا إذن النقط A ، B، C تعين مستويا. **0.5 ن**

إذا كان الشعاع $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\overrightarrow{v_1}$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) فسيتعامد مع كل من$\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$، وعليه يكون: $\begin{cases}2\alpha-\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases}$،
أي: $\begin{cases}\gamma=2\alpha\\ \beta=-2\alpha\end{cases}$ عندئذ وباعتبار $\alpha = 1$ - مثلا - نجد: $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$، ومن أجل كل نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي
(ABC) يكون: $\overrightarrow{AM} \perp \vec{v}$، إذا: $(ABC): (x-1) + (y-2)\times(-2) + (z-2)\times 2 = 0$، أي:
$(ABC): x - 2y + 2z - 1 = 0$. **1 ن**

2/ $(P_1): x - 2y + 2z - 1 = 0$، $(P_2): x - 3y + 2z + 2 = 0$

تبيين أن (P_1) يتقاطع مع (P_2) وفق مستقيم (Δ)، وأن: $C \in (\Delta)$: لذلك يكفي أن نبين أن شعاعين ناظمين لهما غير متوازيين. والشعاعان $\overrightarrow{v_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$، $\overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$ ناظمان لهما على التوالي، وواضح أنهما غير متوازيين، إذا (P_1)، (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)، وأما النقطة C فانتماؤها إلى (Δ) معناه انتماؤها إلى كل من (P_1)، (P_2)، وبالحساب يمكن التحقق أن إحداثيات C تحقق معادلتي (P_1)، (P_2)، إذا $C \in (\Delta)$. **1 ن**

3/ برهان أن الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه لـ(Δ)، واستنتاج تمثيل وسيطي له: $\vec{v}$ غير معدوم، يكفي أن نثبت أنه يوازي (Δ)، ولذلك يكفي أن نثبت أنه يعامد كل من $\overrightarrow{v_1}$، $\overrightarrow{v_2}$.
لدينا: $2\times1 + 0\times(-2) + (-1)\times 2 = 0$، و: $2\times1 + 0\times(-3) + (-1)\times 2 = 0$، ومنه إذا نعم $\vec{v}$ شعاع توجيه لـ(Δ).
ومن أجل كل نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي (Δ) يكون: $\overrightarrow{CM} // \vec{v}$، إذا: $\overrightarrow{CM} = t\vec{v}$ ، حيث t عدد حقيقي. أي:
$\begin{cases}x-1=2t\\ y-3=0\\ z-3=-t\end{cases} \quad / \quad t\in\mathbb{R}$، أي: $\begin{cases}x=2t+1\\ y=3\\ z=-t+3\end{cases} \quad / \quad t\in\mathbb{R}$ وهو تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ). **1 ن**

4/ حساب إحداثيات النقطة M من (Δ) حتى يتعامد الشعاع $\overrightarrow{AM}$ مع المستقيم (Δ)، واستنتج المسافة بين(Δ) و A:
إذا ، ومن التعامد يكون: $\overrightarrow{AM}.\vec{v} = 0$، أي:
$2\times(2t+1-1) + 0\times(3-2) + (-1)\times(-t+3-2) = 0$، أي: $t = \frac{1}{5}$، أي: $M(\frac{7}{5}, 3, \frac{14}{5})$. **1 ن**
والمسافة بين(Δ) و A هي: AM أي: $\sqrt{(\frac{7}{5}-1)^2 + (3-2)^2 + (\frac{14}{5}-2)^2}$ ، وهي: $\frac{3}{\sqrt{5}}$. **0.5 ن**

التمرين الثالث:(04 ن)

1/ عدد كل الإمكانيات: الترتيب لا يهم لأن الرمي يتم في آن واحد، ولولا تكرر القيم لكان عدد الإمكانيات هوC_6^2 ، ولكن ما دام هناك نردان فيمكن أن يتكرر الرقم الواحد في الرمية الواحدة، وبالتالي العدد هو: $C_6^2 + 6$، أي هو: 21. وهذه

الإمكانيات هي: $\{1,1\}$، $\{1,2\}$، $\{1,3\}$، $\{1,4\}$، $\{1,5\}$، $\{1,6\}$، $\{2,2\}$، $\{2,3\}$، $\{2,4\}$، $\{2,5\}$، $\{2,6\}$، $\{3,3\}$، $\{3,4\}$، $\{3,5\}$، $\{3,6\}$، $\{4,4\}$، $\{4,5\}$، $\{4,6\}$، $\{5,5\}$، $\{5,6\}$، $\{6,6\}$. **0.75 ن**

2/ احتمال أن يظهر أحد الرقمين على الأقل أكبر تماما من4: أي تحقق الحادثة:

$\{\{1,5\},\{1,6\},\ \{2,5\},\ \{2,6\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,5\},\{5,6\},\{6,6\}\}$ ، واحتمالها هو: $\frac{11}{21}$. **0.5 ن**

3/ المتغير العشوائي X يرفق كل إمكانية مما مضى بمجموع الرقمين الظاهرين.

- تعريف في جدول قانون احتمال المتغير X : **1 ن**

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

- حساب احتمال أن نحصل على مجموع فردي: الحادثة المناسبة هي: $D=\{3,5,7,9,11\}$، واحتمالها:

$P(D)=\frac{1+2+3+2+1}{21}$، أي: $P(D)=\frac{3}{7}$. **0.5 ن**

- إيجاد C، ثم حساب الاحتمال السابق باستخدام دستور الاحتمالات الكلية: لدينا: $A=\{2,3,4,5,6\}$، $B=\{7,8,9,10\}$،

لكي تتشكل التجزئة ينبغي أن يكون: $C=\{11,12\}$. وعندئذ وحسب دستور الاحتمالات الكلية، نجد:

$P(D)=P_A(D)\times P(A)+P_B(D)\times P(B)+P_C(D)\times P(C)$، أي:

$P(D)=P(D\cap A)+P(D\cap B)+P(D\cap C)$، أي: $P(D)=P(\{3,5\})+P(\{7,9\})+P(\{11\})$، أي:

$P(D)=\frac{1+2}{21}+\frac{3+2}{21}+\frac{1}{21}$ ، أي: $P(D)=\frac{3}{7}$. **0.75 ن**

- حساب الأمل الرياضياتي لـX : نعلم أن: $E(X)=\sum_{i=1}^{n}p_ix_i$، أي:

$E(X)=\frac{1}{21}\times 2+\frac{1}{21}\times 3+\frac{2}{21}\times 4+\frac{2}{21}\times 5+\frac{3}{21}\times 6+\frac{3}{21}\times 7+\frac{3}{21}\times 8+\frac{2}{21}\times 9+\frac{2}{21}\times 10+\frac{1}{21}\times 11+\frac{1}{21}\times 12$،

ونجد: $E(X)=7$. **0.5 ن**

التمرين الرابع:(07 ن)

الدالة: $h:x\longmapsto 2x+\frac{1}{e^x}$ معطى تمثيلها البياني على $\mathbb{R}$. و f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=x^2-\frac{1}{e^x}$.

1/ نشر وتبسيط العبارة: $\frac{1}{e^x}\left(4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-1\right)$، ثم تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$:

$\frac{1}{e^x}\left(4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-1\right)=\frac{1}{e^x}(x^2e^x-1)=x^2-\frac{1}{e^x}$، أي: $\frac{1}{e^x}\left(4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-1\right)=f(x)$ ، ومنه:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}\left(4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-1\right)=-\infty$. **0.5 ن**

2/ دراسة اتجاه تغير f، وتشكيل جدول تغيراتها: f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$، حيث: $f'(x)=2x+\frac{1}{e^x}$، أي:

$f'(x)=h(x)$، وh من خلال تمثيلها البياني هي موجبة على $\mathbb{R}$. إذا f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، و:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ،

إذن فيما يلي جدول التغيرات: **1 ن**

	$-\infty$ $+\infty$
	+
	↗

3/ إيجاد إحداثيتي نقطة الانعطاف لـ(C): f تقبل الاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ حيث:

$f''(x)=2-e^{-x}$ أي: $f''(x)=e^{ln2}-e^{-x}$، وفيما يلي جدول إشارة f'':

	$-\infty$	$-ln2$	$+\infty$
	-	0	+

إذا f'' تنعدم وتغير إشارتها من أجل $-ln2$، ومنه النقطة $B(-ln2,(ln2)^2-2)$، بالتقريب:$B(-0.7,-1.5)$،

هي نقطة انعطاف لـ (C). **1 ن**

4/ دراسة الفروع اللانهائية والمستقيمات المقاربة لـ(C): نجد: $\frac{f(x)}{x}=x-\frac{1}{xe^x}$، أي:

$\frac{f(x)}{x}=x+\frac{e^{-x}}{-x}$، وأيضا: $\frac{f(x)}{x}=x\left(1-\frac{e^{-x}}{(-x)^2}\right)$، فنجد أن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(1-\frac{e^{-x}}{(-x)^2}\right)\right]=+\infty$ ، و: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{e^{-x}}{-x}\right)=+\infty$ ، إذا ليس لـ (C)

مستقيمات مقاربة ، وله فرعا قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب، أحدهما بجوار $+\infty$، والآخر بجوار $-\infty$. **1 ن**

5/ إثبات أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α وأن: $0,5<\alpha<0,8$، وأن: $h(\alpha)=\alpha(2+\alpha)$:

من خلال جدول تغيرات f، ومن نهايتيها، مع ملاحظة الرتابة، نجد أن المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد في $\mathbb{R}$، وليكن α.

ولدينا: $f(0,5)=(0,5)^2-e^{-0,5}=0,25-0.6$ ومنه: $f(0,5)<0$.

و: $f(0,8)=(0,8)^2-e^{-0,8}=0,64-0.45$ ومنه: $f(0,8)>0$. إذا: $f(0,5)\times f(0,8)<0$. و f مستمرة على كل $\mathbb{R}$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة تقبل المعادلة سالفة الذكر حلها في المجال $]0.5,0.8[$، أي: $\boxed{0,5<\alpha<0,8}$.

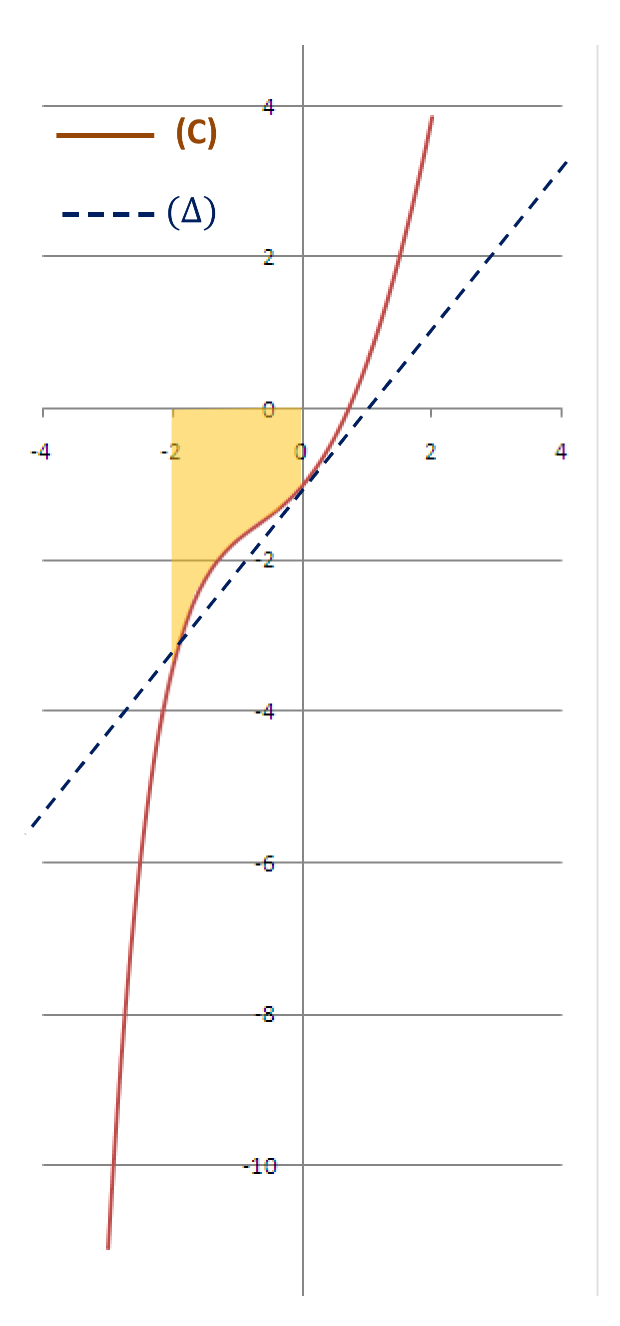
ويكون: $f(\alpha)=0$، أي: $\alpha^2-\frac{1}{e^\alpha}=0$ أي: $\frac{1}{e^\alpha}=\alpha^2$ هذا من جهة، ومن جهة أخرى:

$f'(\alpha)=2\alpha+\frac{1}{e^\alpha}=2\alpha+\alpha^2$ ، أي: $\boxed{f'(\alpha)=\alpha(2+\alpha)}$. **1 ن**

6/ الإتيان بأحسن تقريب تآلفي لـ f بجوار الـ0: هو الدالة: $g:x\longmapsto f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ أي:

$g:x\longmapsto f'(0)(x-0)+f(0)$، أي: $\boxed{g:x\longmapsto x-1}$. **0.5 ن**

7/ إنشاء (C)، و(Δ) مماسه عند النقطة $A(0,-1)$: **1 ن** الشكل:



8/ حساب S: $S=\left|\int_{-2}^{0}f(x)dx\right|=\int_{0}^{-2}(x^2-e^{-x})dx$، أي:

$S=\left[\frac{1}{3}x^3+e^{-x}\right]_0^{-2}=\frac{1}{3}(-2)^3+e^2-1$، أي:

$\boxed{S=e^2-\frac{11}{3}}$. مقدرة بوحدة المساحات. **1 ن**

انتهى

ثانوية بن الهيثم بالبيض — السنة الدراسية : 2010 /2011

القسم : الثالثة تقني رياضي — المدة : 4 ساعات ونصف

الامتحان التجريبي في مادة الرياضيات

التمرين الأول : 1) أكمل الجدول الآتي مع تبرير الحسابات :

	الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
z_A			$4e^{i\frac{\pi}{2}}$
z_B		$4\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$	
z_C	$2\sqrt{3}-2i$		
z_D	4		

2) علم النقط A ، B ، C ، D التي لواحقها على الترتيب z_A ، z_B ، z_C و z_D في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

3) * عين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى C .* استنتج طبيعة المثلث ABC .

4) * عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{\ (A\,,2)\ ,\ \left(B\,,2\sqrt{3}-3\right),(C\,,1)\ \}$

* تحقق أن $z_G = z_D - z_C$. استنتج طبيعة الرباعي OGDC .

التمرين الثاني : تذكير : من أجل كل عددين صحيحين a وb نقول أن a يوافق b بترديد 7 ونكتب $a\equiv b[7]$ إذا وجد عدد صحيح k حيث a = b + 7k .

1) سؤال من الدرس :

a) لتكن a ، b ، c و d أعداد صحيحة . أثبت أنه إذا كان $a\equiv b[7]$ و $c\equiv d[7]$ فإن $ac\equiv bd[7]$

b) استنتج أنه من أجل كل عددين صحيحين غير معدومين a وb :

إذا كان $a\equiv b[7]$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n : $a^n\equiv b^n[7]$.

2) من أجل a = 2 ثم من أجل a = 3 أوجد عدد طبيعي n غير معدوم يحقق : $a^n\equiv 1[7]$.

a) ليكن a عدد طبيعي لايقبل القسمة على 7 . أثبت أن $a^6\equiv 1[7]$.

b) حدد أصغر عدد طبيعي غير معدوم k يحقق $a^k\equiv 1[7]$ من أجل $2\le a\le 6$.

c) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $A_n = 2^n+3^n+4^n+5^n+6^n$. بين أن : $A_{2011}\equiv 6[7]$

التمرين الثالث : الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على IR كمايلي : $g(x)=1-xe^x$

1) ادرس تغيرات الدالة g . 2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $\left]\frac{1}{2}\,;1\right[$

3) استنتج أن $g(x)<0$ من أجل $x>\alpha$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR كمايلي : $f(x) = \frac{1+x}{e^x+1}$ نرمز بـ (Cf) للمنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ (الوحدة : 2cm)

1) بين نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي 0 . فسر النتيجة هندسيا ثم احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$

2) بين أن : $\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^x = 0$ ثم استنتج أن : $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = 0$

أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة .

3) حدد وضعية المنحنى (Cf) بالنسبة للمستقيم (d) ذو المعادلة y = x + 1 .

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$ حيث $f'(x)$ يرمز إلى العبارة المشتقة للدالة f

5) بين أن $f(\alpha) = \alpha$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

الجزء الثالث :

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كمايلي : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

1) * احسب u_1 . * برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le \alpha$ و $u_n \le u_{n+1}$

* استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

2) نرمز بـ a إلى نهاية المتتالية (u_n) . برر أن $(a) = a$ ثم استنتج قيمة a .

4) بأخذ u_2 كقيمة تقريبية إلى α ، احسب u_2 ثم أنشئ المستقيم (d) و المنحنى (Cf) .

التمرين الرابع : في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$ ، نعتبر النقطتين: $A\left(\frac{2}{3};-3;2\right)$ و $B\left(-\frac{4}{3};0;-4\right)$ ، نرمز بـ I إلى منتصف القطعة [AB] و (S) إلى الكرة التي قطرها [AB]

1) * احسب إحداثيات النقطة E مرجح الجملة $\{(A,2)\ ,\ (B,\ 1)\}$

* بين أن المجموعة (P) للنقط M من الفضاء حيث : $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\|$ هي المستوي المحوري للقطعة [OE] .

* بين أن معادلة للمستوي (P) هي y = -1 .

2) * احسب نصف قطر الكرة (S) والمسافة بين المركز I للكرة (S) و المستوي (P) . استنتج أن التقاطع (C) للكرة (S) و المستوي غير خال.

* بين أن معادلة للمجموعة (C) في المستوي (P) تكتب : $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12$

* استنتج أن (C) دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها .

<u>التصحيح وسلم التنقيط لامتحان التجريبي 2011</u>

<u>التمرين الأول :</u> 4

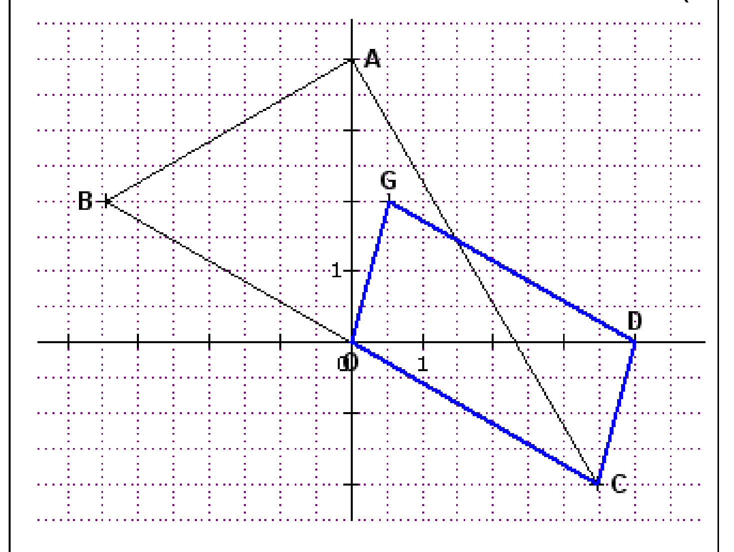
1) $z_A = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 4i$ 0.25

$z_B = 4\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = 4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ 0.5

$z_C = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \times \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$z_D = 4[\cos(0) + i \times \sin(0)] = 4e^{i0}$ 0.5

2) 0.5



3) * نسبة وزاوية التشابه المباشر

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2\sqrt{3} - 6i}{-2\sqrt{3} - 2i} = \sqrt{3}i$ 0.5

نسبة التشابه المباشر : $|\sqrt{3}i| = \sqrt{3}$ 0.25

زاويته : $arg(\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{2}$ 0.25

المثلث ABC قائم في A : $arg(\sqrt{3}i) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ 0.25

4) * لاحقة المرجح G :

$z_G = \frac{2z_A + (2\sqrt{3} - 3)z_B + z_C}{2 + 2\sqrt{3} - 3 + 1} = 4 - 2\sqrt{3} + 2i$ 0.25

* التحقق : $z_C - z_D + z_G = 0$ 0.25

نستنتج أن : $z_G = z_D - z_C$ ومنه $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{CD}$ 0.25

أي الرباعي OGDC متوازي أضلاع . 0.25

<u>التمرين الثاني :</u> 3 .75

1) a) $a = b + 7k$ و $c = d + 7k'$ حيث k و k' عددان صحيحان ومنه : 0.25

$ac = (b + 7k)(d + 7k') = bd + 7(kd + k'b + 7kk')$

بما أن $kd + k'b + 7kk'$ عدد صحيح فإن: $ac \equiv bd[7]$

b) البرهان بالتراجع :

التحقق: الخاصية صحيحة من أجل n = 0 لأن إذا كان $a \equiv b[7]$ فإن $a^0 \equiv b^0[7]$ لأن $a^0 = b^0 = 1$

الانتقال من الرتبة n إلى الرتبة n+1 :

إذا كان $a^n \equiv b^n[7]$ و $a \equiv b[7]$ فإن 0.5

$a \times a^n \equiv b \times b^n[7]$ وهذا حسب النتيجة السابقة ومنه

نستنتج أن مهما يكن العدد الطبيعي $a^{n+1} \equiv b^{n+1}[7]$

n : إذا كان $a \equiv b[7]$ فإن $a^n \equiv b^n[7]$

2) من أجل a = 2 : $2^3 \equiv 1[7]$ أي n = 3 0.25

من أجل a = 3 : $3^6 \equiv 1[7]$ أي n = 6 0.25

a) إذا كان a لايقبل القسمة على 7 فإن باقي قسمة a على 7 تساوي 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 ومنه :

إذا كان $a \equiv 1[7]$ فإن $a^6 \equiv 1[7]$

إذا كان $a \equiv 2[7]$ فإن $a^6 \equiv 2^6[7]$ أي $a^6 \equiv 1[7]$

إذا كان $a \equiv 3[7]$ فإن $a^6 \equiv 3^6[7]$ أي $a^6 \equiv 1[7]$

إذا كان $a \equiv 4[7]$ فإن $a^6 \equiv (-3)^6[7]$ أي $a^6 \equiv 1[7]$

إذا كان $a \equiv 5[7]$ فإن $a^6 \equiv (-2)^6[7]$ أي $a^6 \equiv 1[7]$

إذا كان $a \equiv 6[7]$ فإن $a^6 \equiv (-1)^6[7]$ أي $a^6 \equiv 1[7]$. 1.75

b) من السؤال السابق نستنتج اصغر قيمة لـ k هي 6 . **0.25**

c) بما أن : 2011= 335x6 + 1 فإن : $A_{2011} \equiv 6[7]$

لأن $A_{2011} \equiv 2+3+4+5+6[7]$ **0.5**

<u>التمرين الثالث :</u> **8.75**

<u>الجزء الأول</u> **(2)**

1) دراسة تغيرات الدالة g :

* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 1$ **0.5**

* g قابلة للاشتقاق على IR و من أجل كل عدد حقيقي x :

$g'(x) = -e^x - xe^x = -(1+x)e^x$ **0.25**

نستنتج : $g'(x) = 0$ من أجل x = -1 ، $g'(x) > 0$ من أجل x <-1 و $g'(x) < 0$ من أجل x > -1 **0.25**

جدول التغيرات : **0.25**

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
g'(x)		+	0	-	
g(x)	1	↗	$1+e^{-1}$	↘	$-\infty$

2) الدالة g مستمرة على $]-\infty\,;\,-1]$ وصورة المجال $]-\infty\,;\,-1]$ هو المجال $]1\,;\,1+e^{-1}\,]$ نستنتج أن المعادلة g(x) = 0 لاتقبل حلا في $]-\infty\,;\,-1]$

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماعلى $[-1\,;+\infty[$ وصورة المجال $[-1\,;+\infty[$ هو المجال $]-\infty\,;\,1+e^{-1}]$ نستنتج أن المعادلة g(x) = 0 تقبل حلا وحيدا في $[-1\,;+\infty[$ لأن 0 ينتمي إلى $]-\infty\,;\,1+e^{-1}]$ وبما أن $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ و $f(1) > 0$ فإن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. **0.5**

3) بما أن g متناقصة على $[\alpha;+\infty[$ نستنتج أنه إذا كان $x > \alpha$ فإن $g(x) < g(\alpha)$ أي g(x) < 0 . **0.25**

الجزء الثاني : **3.25**

1) بجوار $+\infty$: $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}+1}{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}$ **0.25**

نستنتج أن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، المستقيم الذي معادلته y = 0 مقارب لمنحنى f **0.25**

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ **0.25**

2) * $\lim_{x\to-\infty} (1+x)e^x = \lim_{x\to-\infty} (e^x+xe^x) = 0$ **0.25**

* بما أن

$$f(x) - (x+1) = (x+1)\left[\frac{1}{e^x+1} - 1\right]$$

$$= -(x+1)\left[\frac{e^x}{e^x+1}\right]$$ فإن

$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = 0$ **0.25**

التفسير الهندسي : المستقيم (d) مقارب للمنحنى (Cf) **0.25**

3) لدراسة وضعية المنحنى (Cf) بالنسبة للمستقيم (d) ندرس إشارة $-(x+1)$. ومنه :

إذا كان x = -1 فإن (d) يقطع (Cf) في النقطة (-1 ;0)

إذا كان x >-1 فإن (d) أعلى (Cf)

إذا كان x < -1 فإن (d) اسفل (Cf) **0.5**

4) الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ومن أجل كل عدد x :

$$f'(x) = \frac{1\times(e^x+1)-(1+x)e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{1-xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$ **0.5**

5) من جهة : $f(\alpha) = \dfrac{1+\alpha}{e^\alpha+1}$

من جهة أخرى $g(\alpha) = 0$ تكافئ $1-\alpha\, e^\alpha = 0$

ومنه : $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ بالتعويض : $f(\alpha) = \dfrac{1+\alpha}{\frac{1}{\alpha}+1} = \alpha$ **0.5**

جدول تغيرات f : 0.25

x	$-\infty$		$\propto$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	$-\infty$	↗	$\propto$	↘	0

الجزء الثالث : 2.5

1) * $u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{1}{2}$ 0.25

* إثبات بالتراجع أن : مهما يكن n : $0 \leq u_n \leq \propto$

- الخاصية صحيحة من أجل n = 0 لأن :
  $u_0 = 0$ و $\frac{1}{2} \leq \propto \leq 1$ ومنه 0.25
  $0 \leq u_0 \leq \propto$
- نفرض أن $0 \leq u_n \leq \propto$ بما أن f متزايدة على المجال $[0 ; \propto]$ فإن
  نستنتج أن : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(\propto)$:

$0 \leq u_{n+1} \leq \propto$ لأن $u_{n+1} = f(u_n)$ 0.25

و $f(\propto) = \propto$ و $f(0) = \frac{1}{2}$

نستنتج : مهما يكن n : $0 \leq u_n \leq \propto$.

إثبات بالتراجع أن : مهما يكن n : $u_n \leq u_{n+1}$

- الخاصية صحيحة من أجل n = 0 لأن :
  $u_0 = 0$ و $u_1 = \frac{1}{2}$ ومنه $u_0 \leq u_1$ 0.25
- نفرض أن $u_n \leq u_{n+1}$ بما أن f متزايدة على المجال $[0 ; \propto]$ فإن $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$

ومنه $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ نستنتج أن : 0.25

مهما يكن n : $u_n \leq u_{n+1}$.

بما أن المتتالية: (u_n) متزيدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة . 0.25

2) بما أن المتتالية (u_n) متقاربة فإن $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = a$

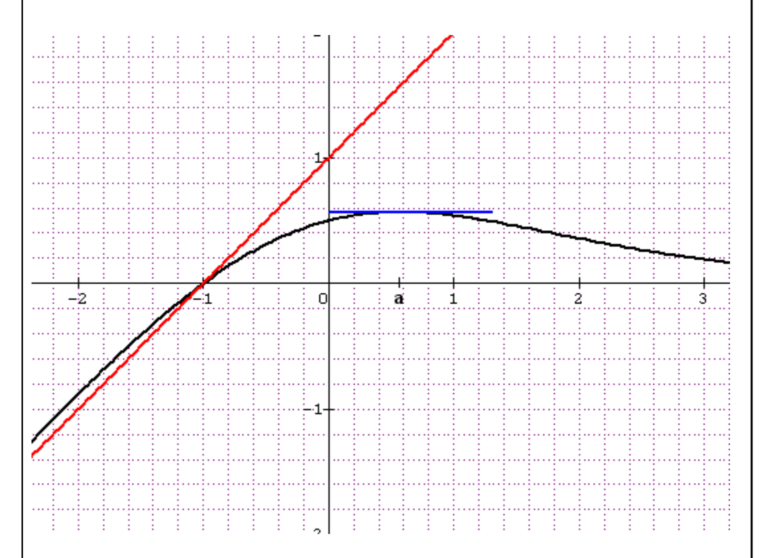
من جهة أخرى بما أن الدالة f مستمرة على IR فهي مستمرة عند a ومنه $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ نستنتج أن

$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$ ومنه $f(a) = a$ أي $a = \propto$ 0.25

3) حساب u_2 ورسم المنحنى (Cf) والمستقيم (d) :

$u_2 = f(u_1) = \frac{1+u_1}{e^{u_1}+1} = \frac{1+0.5}{e^{0.5}+1} \approx 0.56$ 0.25

الرسم : 0.5



التمرين الرابع : 3.5

1) *إحداثيات النقطة E مرجح الجملة : $\{(A,2),(B,1)\}$

$x_E = \frac{2x_A+x_B}{2+1} = 0$ و $y_E = \frac{2y_A+y_B}{2+1} = -2$

و $z_E = \frac{2z_A+z_B}{2+1} = 0$ ومنه E(0 ; -2 ; 0) . 0.5

*بما أن : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = (2+1)\overrightarrow{ME}$ فإن نقطة M تنتمي إلى (P) إذا تحقق الشرط : 0.25

$\|3\overrightarrow{ME}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\|$ أي $\|\overrightarrow{ME}\| = \|\overrightarrow{MO}\|$ 0.25

ومنه المجموعة (P) هي المستوي المحوري للقطعة [OE] .

* الشعاع $\overrightarrow{OE}$ شعاع ناظم للمستوي (P) و (P) يشمل منتصف القطعة [OE] . بما أن (0 ; -2 ; 0) $\overrightarrow{OE}$

و إحداثيات منتصف [OE] هي (0 ; -1 ; 0) فإن معادلة

(P) تكتب :

$$O(x-1)+(-2)(y+1)+0(z-0)=0$$

أي $y=-1$ **0.5**

2) * نصف قطر الكرة (S) :

$\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}{2}=\frac{7}{2}$ **0.25**

المسافة بين المركز I و المستوي (P) :

إحداثيات I : $I\left(-\frac{1}{3};-\frac{3}{2};-1\right)$

المسافة بين I و المستوي (P) : $\frac{\left|-\frac{3}{2}+1\right|}{1}=\frac{1}{2}$ **0.5**

بما أن $\frac{1}{2}<\frac{7}{2}$ فإن تقاطع (P) و (S) مجموعة

غير خالية **0.25**

المجموعة (C) هي الدائرة التي تمثيلها الديكارتي : **0.25**

$$\left\{\left(x\right.\right.$$

في المستوي (P) تكتب معادلة (C) : **0.25**

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(-1+\frac{3}{2}\right)^2+(z+1)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

أي : $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=12$

الدائرة (C) مركزها $\left(-\frac{1}{3};-1;-1\right)$ ونصف

قطرها $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ **0.5**

مديرية التربية لولايتي البويرة و بومرداس
ثانويات : بشلول+ نصر الدين المشدالي + صحاريج + حيزر + الأربعطاش الجديدة
المستوى: السنة الثالثة علوم تجريبية — دورة مـــــاي 2016
المادة: رياضيات — المــــدة: 03 ساعات و30 دقيقة

امتحان الباكالوريا التجريبي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد، متجانس $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقط B,A و C التي لواحقها على الترتيب $z_A=1+i$ ، $z_B=\sqrt{3}-i$ و $z_C=4$.

1) أ) أكتب الأعداد ، z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$ على شكل المثلثي، ثم استنتج الشكل الأسي .

ب) أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على شكله الجبري ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

2) أوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1}{8}\left(1-\sqrt{3}i\right)$ ، أحسب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8$.

3) ليكن التحويل النقطي S الذي يرفق بكل النقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث : $z'=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}z$.

- حدد طبيعة التحويل النقطي S و عناصره المميزة.

4) أ) أوجد المجموعة (Γ_1) للنقط $M(z)$ من المستوي و التي تحقق : $z=z_c+2e^{i\theta}$ لما θ تمسح $\mathbb{R}$.

ب) أوجد المجموعة (Γ_2) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق : $Arg(z-z_c)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$

5) أوجد صورة (Γ_1) بالتحويل النقطي S ، استنتج مساحتها .

التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

نعتبر النقط $A(3;4;0)$ ، $B(0;5;0)$ ، $C(0;0;5)$ ، $D(-2;-6;5)$ ، $E(-4;0;-3)$ و الشعاع $\vec{n}(1;3;3)$

1. بين أن النقط C,B,A تعيّن مستو (ABC)،تأكد أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي له ثم اكتب معادلة ديكارتية له

2 . أ / برهن أن المثلث AOB متساوي الساقين .

ب / عين إحداثيي النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ ، ثم بين أن $OI=\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

جـ / بين أن المستقيم (OC) عمودي على المستوي (AOB)

د/ استنتج حجم رباعي الوجوه OABC

3. احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) .

4 . أ/ جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (DE) .

ب/ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة المستقيمة $[DE]$.

جـ / تحقق ان النقطة $F\left(-1;1;\frac{7}{2}\right)$ تنتمي للمستوي (Q)

د / استنتج المسافة بين النقطة F والمستقيم (DE) .

التمرين الثالث : (3.5 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \int_{n}^{n+1} e^{2-x}\,dx$

1) أحسب u_0 ثم اثبت مستعملا مبدأ الاستدلال بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

2) أحسب u_n بدلالة n .

3) برهن أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول .

4) أ) أحسب بدلالة n الفرق $u_{n+1} - u_n$ ، ثم أستنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

5) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

أحسب بدلالة n المجموع S_n ، ثم أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الرابع: (7 نقاط)

الجزء1: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث الوحدة $2cm$ على محور الفواصل و $5cm$ على محور التراتيب

1. أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

2. أ/بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x) = \frac{x}{e^{x}} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$

ب/ أحسب نهاية f عند $+\infty$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. نعتبر على المجال $]-1;+\infty[$ الدالة g المعرفة بـ: $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$

أ/ أدرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $[0;+\infty[$

ب/ أحسب $g(0)$، ثم إستنتج إشارة $g(t)$ من أجل t موجب تماما.

4. أ/بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x) = \frac{g(e^{x})}{e^{x}}$

ب/ إستنتج أن f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج/ أنشئ (C_f)

الجزء الثاني: نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0;+\infty[$بـ : $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي t: $\frac{1}{1+e^{t}} = 1 - \frac{e^{t}}{1+e^{t}}$

2. باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن: $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^{x}}{e^{x}}\right) - f(x) + 2\ln 2$

3. إستنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = \ln 4$ ، $x = 0$.

الموضوع الثاني:

التمرين الاول : (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم ، متعامد ، متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A\left(-1;-3;3\right)$ ، $B\left(-3;-2;1\right)$ و $C\left(1;5;6\right)$

و المستقيمان : $(\Delta):\begin{cases}x=-1-2t\\y=-3+t\\z=2-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$ و $(d):\begin{cases}x=-k\\y=-4k+1\\z=-2k+4\end{cases}\quad(k\in\mathbb{R})$

1. بين أن المستقيمين (d) و (Δ) يتقطعان في نقطة D يطلب تعين إحداثياتها .
2. تحقق أن : $B\in(\Delta)$ و $C\in(d)$ ، ثم بين أن المثلث BCD قائم.
3. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) المعرف بالمستقيمين (d) و (Δ) .
4. تحقق أن المستوي $(Q):-4x+y-1=0$ معرف بالمستقيم (d) و النقطة A
5. ليكن α عدد حقيقي و G نقطة من الفضاء .
   أ) عين شرطا على العدد الحقيقي α بحيث تكون النقطة G مرجح للجملة المثقلة $\left\{(B,\alpha);(C,-2\alpha);(D,5)\right\}$.
   ب) أوجد إحداثيات النقطة G من أجل $\alpha=-1$.
6. عين (S) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $GM^2=36$.

التمرين الثاني : (5 نقاط)

I) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ، $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$

2) نضع : $z_A=2i$ ، $z_B=-\sqrt{3}+i$ ، $z_C=-\sqrt{3}-i$. أكتب الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسي .

3) بين ان العدد ، $z_B{}^{2016}$ حقيقي

II) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب z_A ، z_B و z_C

1) أحسب قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$ ثم إستنتج طبيعة المثلث OAB .

2) أثبت أن الرباعي $OABC$ معين يطلب حساب مساحته .

3) أ)حدد زاوية الدوران $\mathfrak{R}$ الذي مركزه النقطة B و يحول النقطة O الى النقطة A

ب) أكتب الصيغة المركبة للتحاكي $\mathcal{H}$ الذي مركزه B ونسبته 2

4) حدد الطبيعة و العناصر المميزة لتحويل $S=\mathfrak{R}\circ\mathcal{H}$ ثم أعط الصيغة المركبة له .

5) عين طبيعة صورة المعين $OABC$ بالتحويل S . ثم أحسب مساحته .

التمرين الثالث : (4 نقاط)

(U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان كما يلي : $U_0=1$ و $V_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n:

$$U_{n+1}=\frac{U_n+2V_n}{3} \quad ، \quad V_{n+1}=\frac{U_n+4V_n}{5}$$

1) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $W_n=U_n-V_n$.

أ) أثبت أن المتتالية (W_n) هندسية يطلب تعين أساسها و حدها الأول.

ب) أكتب W_n بدلالة n ، ثم عين نهايتها.

2) عبر عن : $U_{n+1}-U_n$ و $V_{n+1}-V_n$ بدلالة W_n .

- استنتج اتجاه تغير المتتالتين (U_n) و (V_n) ، ثم بين أنهما متجاورتان.

3) من اجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة بـ : $t_n = 3U_n + 10V_n$

أ) بين أن المتتالية (t_n) ثابتة ، ثم احسب نهايتها.

ب) عين نهاية المتتاليتين (U_n) و (V_n).

التمرين الرابع: (7 نقاط)

الجزء 01:

نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x)=\alpha x+\dfrac{\beta}{1+e^x}$ حيث $\alpha\ ;\ \beta$ عددان حقيقيان ثابتان .

أحسب $F'(x)$ ثم عين العددين الحقيقيين $\alpha\ ;\ \beta$ حيث $F(1)=\dfrac{e}{1+e}$ و $F'(0)=\dfrac{5}{4}$

الجزء 02: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x-\dfrac{1}{1+e^x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $4cm$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)>0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. أ) بين أن المستقيمين المعرفين بـ $(\Delta_1):\ y=x$ و $(\Delta_2):\ y=x-1$ مستقيمان مقاربان للمنحني (C_f)

   ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) .
4. تحقق أن $f(-x)+f(x)=-1$ ، ماذا تستنتج؟
5. ليكن (T) المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 . اكتب معادلة لـ (T) .
6. أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا حقيقيا وحيدا α حيث $0<\alpha<0{,}5$

   ب) تحقق أن $1+e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$.
7. أنشئ كلا من (Δ_1)، (Δ_2)، (T) و (C_f). (نقبل ان المنحنى (C_f) يقبل $\left(0\ ;-\dfrac{1}{2}\right)$ كنقطة إنعطاف)
8. ناقش بيانيا و ذلك حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $m=\dfrac{1}{1+e^x}$
9. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، كما يلي: $u_n=\int_{\alpha}^{n}[x-f(x)]\,dx$.

   أ) أعط تفسيرا هندسيا لـ u_n

   ب) تحقق أن $x-f(x)=1-\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

   جـ) احسب u_n بدلالة n

   د) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n=-(\alpha+\ln\alpha)$.

وزارة التربية الوطنية	مديرية التربية لولاية البويرة
ثانوية خالص سليمان - بشلول	المستوى: السنة الثالثة علوم تجريبية

التَصْحِيحْ المفصل للبكالوريا التجريبي 2016/05/17 الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (05 نقاط) (الأعداد المركبة) — التنقيط

1) أ) كتابة z_A ، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل المثلثي و استنتاج الشكل الأسي :

لدينا، $\arg(z_A)=\frac{\pi}{4}$; $|z_A|=\sqrt{2}$ $\quad \arg(z_B)=-\frac{\pi}{6}$; $|z_B|=2$

01ن

$\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=\frac{|z_A|}{|z_B|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=\arg(z_A)-\arg(z_B)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$

منه:

العدد المركب	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
z_A	$\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
z_B	$2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$	$2e^{-\frac{\pi}{6}i}$
$\frac{z_A}{z_B}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right]$	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{12}i}$

ب) كتابة العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري: 0,5

$$\frac{z_A}{z_B}=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}=\frac{\sqrt{3}+i+i\sqrt{3}-1}{3+1}=\boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{\sqrt{3}+1}{4}}$$

استنتاج القيمة المظبوطة لكل من، $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$:

0,5 لدينا مما سبق: $\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

بمطابقة الشكل الجبري و المثلثي للعدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ نجد:

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\end{cases}$$ ومنه : $$\boxed{\begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{cases}}$$.

2) إيجاد قيمة العدد الطبيعي n :

0,25 $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n=\frac{1}{8}(1-\sqrt{3}i)$ تكافئ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}\right)^n=\frac{1}{4}e^{i\frac{5\pi}{3}}$ أي $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{5n\pi}{12}}=\frac{1}{4}e^{i\frac{5\pi}{3}}$ ومنه $\boxed{n=4}$

0,25 $$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8=\left(\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^4\right)^2=\left(\frac{1}{8}(1-\sqrt{3}i)\right)^2=\frac{1}{16}(-2-2\sqrt{3}i)=\boxed{-\frac{1}{8}(1+\sqrt{3}i)}$$

3) طبيعة التحويل النقطي S وعناصره المميزة:	
التحويل النقطي S معادلته من الشكل ، $z'=az+b$ حيث $a=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$ و $b=0$.	0,75
بما أن $a\in\mathbb{C}$ و $\lvert a\rvert\neq 1$ فإن S عبارة عن تشابه مباشر	
نسبته: $k=\lvert a\rvert=\frac{\sqrt{2}}{2}$ زاويته : $\theta=\arg(a)=\frac{5\pi}{12}$ مركزه النقطة O لأن $b=0$	
4) أ) تعيين المجموعة (Γ_1) للنقط $M(z)$ من المستوي و التي تحقق: $z=z_c+2e^{i\theta}$ لما θ تمسح $\mathbb{R}$:	
$z=z_c+2e^{i\theta}$ تكافئ $z-z_c=2e^{i\theta}$	0,5
تكافئ $\lvert z-z_c\rvert=2$	
تكافئ $CM=2$ ومنه (Γ_1) هي الدائرة ذات المركز C ونصف القطر 2	
ب) تعيين المجموعة (Γ_2) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق : $Arg(z-z_c)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$:	
$Arg(z-z_c)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ يكافئ $(\vec{u};\overrightarrow{CM})=\frac{\pi}{4}+2\pi k$	0,5
يكافئ M تنتمي الى نصف المستقيم الذي مبدؤه C و الموجه بالشعاع $\vec{v}$ حيث $(\vec{u};\vec{v})=\frac{\pi}{4}$	
5) إيجاد صورة المجموعة (Γ_1) بالتحويل S :	
لدينا، (Γ_1) هي الدائرة ذات المركز C ونصف القطر 2، بما التحويل S تشابه مباشر فإنه يحافظ على طبيعة الأشكال و عليه :	0,5
صورة (Γ_1) بالتحويل S هي الدائرة ذات المركز 'C ونصف القطر 'r حيث :	
$\begin{cases} C'=S(C) \\ r'=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2 \end{cases}$ وبعد الحساب نجد: $\begin{cases} C'=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}} \\ r'=\sqrt{2} \end{cases}$	
مساحته:	0,25

تصحيح التمرين الثاني (04.5 نقاط) (الهندسة الفضائية)	التنقيط

1) تبيان أن النقط A ، B و C تعين مستوي :

0,25

لدينا، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\-4\\-5\end{pmatrix}$ ، بما أن $\frac{-3}{-4}\neq\frac{-3}{-3}$ فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

وعليه النقط A ، B و C تعين مستوي (ABC)

♦ **التأكد أن $\vec{n}(1;3;3)$ شعاع ناظمي له :**

0,75

لدينا، $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=(1\times-3)+(3\times1)+(3\times0)=-3+3=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=(1\times-3)+(3\times-4)+(3\times-5)=-3-12+15=0\end{cases}$

الشعاع $\vec{n}$ عمودي على شعاعين غير مرطبتين خطيا من المستوي (ABC) فهو شعاع ناظمي له.

وعليه المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) من الشكل : $x+3y+3z+d=0$ مع $d\in\mathbb{R}$

بما أن : $C\in(ABC)$ نجد: $15+d=0$ أي $d=-15$

- المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي $x+3y+3z-15=0$ -

2) أ) برهان ان المثلث AOB متساوي الساقين:

0,25

لدينا، $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}$ ومنه نجد: $OA=OB=5$ إذن المثلث AOB متساوي الساقين

0,25

ب) تعيين إحداثيات النقطة I منتصف القطعة [AB] :

لدينا، $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3}{2}$ $\quad y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{9}{2}$ $\quad z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=0$ ومنه $I\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2};0\right)$

025

حساب OI : $OI=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2+(0)^2}=\sqrt{\frac{9+81+0}{4}}=\sqrt{\frac{90}{4}}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$

ج) تبيان ان المستقيم (OC) عمودي علة المستقيم (AOB) :

0,5

لدينا، $\begin{cases}\overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{OA}=(0\times3)+(0\times4)+(5\times0)=0\\ \overrightarrow{OC}\bullet\overrightarrow{OB}=(0\times0)+(0\times5)+(5\times0)=0\end{cases}$ منه الشعاع $\overrightarrow{OC}$ عمودي على شعاعين غير مرتبطين من المستوي (AOB) ومنه المستقيم (OC) عمودي على المستوي (AOB) .

د) استنتاج حجم رباعي الوجوه OABC :

0,5

$V_{OABC}=\frac{1}{3}\times S_{ABC}\times OC$ حيث S_{ABC} مساحة المثلث ABC

$V_{OABC}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}AB\times OI\right]\times OC=\frac{1}{6}\sqrt{10}\times\frac{3\sqrt{10}}{2}\times5=\boxed{\frac{25}{2}\ u.v}$

3) المسافة بين النقطة O و المستوي (ABC) :

0,25

$d[O;(ABC)]=\frac{|-15|}{\sqrt{1+3^2+3^2}}=\frac{15}{\sqrt{19}}=\frac{15\sqrt{19}}{19}$

4) أ) التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE) :

من اجل كل نقطة $M(x;y;z)$ من المستقيم (DE) نجد: $\overrightarrow{EM}=t\times\overrightarrow{DE}\ /\ t\in\mathbb{R}$

التنقيط	
0,5	حيث $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-2\\6\\-8\end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم(DE) ومنه: $\begin{cases}x=-4-2t\\y=6t\\z=-3-8t\end{cases}$ $/t\in\mathbb{R}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (DE) .
	ب) المعادلة الديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة $[DE]$:
0,5	لدينا، $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}-2\\6\\-8\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (Q) و النقطة $J(-3;-3;1)$ منتصق القطعة $[DE]$ تنتمي الى المستوي (Q) وعليه نجد بعد الحساب أن $-2x+6y-8z+20=0$ معادلة ديكارتية للمستوي (Q)
	ج) التحقق أن النقطة $F\left(-1;1;\frac{7}{2}\right)$ تنتمي للمستوي (Q) :
0,25	لدينا، $-2x_F+6y_F-8z_F+20=-2(-1)+6(1)-8\left(\frac{7}{2}\right)+20=2+6-28+20=0$ إذن $F\in(Q)$.
0,25	**د) استنتاج المسافة بين النقطة F و المستقيم (DE) :** من السؤالين 4)ب) و 4)ج) نستنتج: $d[F;(DE)]=FJ=\sqrt{2^2+4^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{105}}{2}$
التنقيط	**تصحيح التمرين الثالث (3,5 نقاط) (المتتاليات)**
	1)حساب u_0 ثم البرهان بالتراجع أن $u_n>0$:
0,25	حساب u_0 : $u_0=\int_0^1 e^{2-x}dx=-\int_0^1 -e^{2-x}dx=-\left[e^{2-x}\right]_0^1=-\left(e-e^2\right)=e^2-e$
0,75	نضع: $P(n):u_n>0$ المرحلة01: من اجل $n=0$ نجد $u_0=e^2-e$ ومنه $u_0>0$ وعليه $P(0)$ محققة المرحلة02: من اجل عدد طبيعي n ، نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ لدينا، $u_{n+1}=\int_{n+1}^{n+2} e^{2-x}$ و بوضع: $x=t+1$ نجد، $t=x-1$ ومنه نجد : $u_{n+1}=\int_n^{n+1} e^{2-(t+1)}dt$ ومنه، $u_{n+1}=\int_n^{n+1} e^{2-t}\times e^{-1}dt$ وعليه نجد: $u_{n+1}=e^{-1}\underbrace{\int_n^{n+1} e^{2-t}dt}_{>0}$ ومنه نجد: $u_{n+1}>0$ وعليه $p(n+1)$ محققة . - من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n>0$ -
	2) حساب u_n بدلالة n :
0,5	$u_n=\int_n^{n+1} e^{2-x}dx=-\left[e^{2-x}\right]_n^{n+1}=-\left[e^{1-n}-e^{2-n}\right]=e^{2-n}-e^{1-n}=(e-1)e^{1-n}$
	3) إثبات أن (u_n) متتالية هندسية:
0,5	من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=(e-1)e^{1-(n+1)}=(e-1)e^{1-n}\times e^{-1}=\frac{1}{e}\times u_n$

إذن (u_n) متتالية هندسية أساسهـــا $q=\frac{1}{e}$ و حدها الأول $u_0=e^2-e$

4) أ) **تعيين إتجاه تغير المتتالية (u_n) :**

من اجل كل عدد طبيعي n،

0,5

$$u_{n+1}-u_n=(e-1)e^{-n}-(e-1)e^{1-n}=(e-1)e^{-n}(1-e)=-(e-1)^2e^{-n}$$

نلاحظ: $u_{n+1}-u_n<0$ وعليه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

ب) **استنتاج ان (u_n) متقاربة:**

0,25

بما ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة .

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}(e-1)e^{1-n}=0$$

5) **حساب S_n :**

0,5

$$S_n=u_0+u_1+...+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=(e^2-e)\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{e}}=e^2\left(1-\frac{1}{e^{n+1}}\right)$$

0,25

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}e^2\left(1-\frac{1}{e^{n+1}}\right)=e^2$$

تصحيح التمرين الرابع (7نقاط) (الدوال العددية)	التنقيط

الجـــــــزء الأول: $f(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$ ، $D_f=\mathbb{R}$.

0,5

❶ $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\ln(1+e^x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ ، نضـــــــع: $y=e^x$ نجـد:

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=1$ ومنـــــه : $\boxed{\lim_{x\to-\infty}f(x)=1}$.

0,25

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقــــــارب أفقي معادلته $\boxed{y=1}$ بجـــــــوار $-\infty$.

2) أ/ لدينا من أجل كل عدد حقيقي x:

0,25

$$f(x)=e^{-x}\ln\left[e^x(e^{-x}+1)\right]=e^{-x}\left[\underbrace{\ln e^x}_{=x}+\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]=e^{-x}\times x+e^{-x}\ln(1+e^{-x})$$

$$=\frac{x}{e^x}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})$$

ب/**حساب نهاية f عند $+\infty$ و تفسيرها هندسيـــا :**

0,5

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}+e^{-x}\ln(1+e^{-x})\right]$ ، لدينا: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ ، وبوضع: $1+e^{-x}=y$ نجد:

$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\ln(1+e^{-x})=\lim_{y\to1}(y-1)\ln y=0$ ومنــه: $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0}$.

0,25

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقــــــارب أفقي معادلته $\boxed{y=0}$ بجــــــوار $+\infty$.

3) $g(t)=\frac{t}{1+t}-\ln(1+t)$ ، $D_g=]-1;+\infty[$

	أ/ دراسة تغيرات الدالة g:
0,75	النهايات: $\lim_{t\to+\infty} g(t) = -\infty$
	- من أجل كل عدد حقيقي t من $]0;+\infty[$، ولدينا: $g'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{1+t} = \frac{-t}{(1+t)^2}$
	- نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي t من $]0;+\infty[$: $g'(t) < 0$.
	ب/ جدول التغيرات: لدينا: $g(0) = 0$

t	0 $+\infty$
g'(t)	−
g(t)	0 ↘ $-\infty$

0,5	من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما t أن: $g(t) < 0$.
	4) أ/ حساب $f'(x)$:
0,5	لدينا الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا: $f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \frac{e^x}{1+e^x} \times e^{-x}$
	ومنه: $f'(x) = -\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} + \frac{e^x}{e^x(1+e^x)} = \frac{1}{e^x}\left[-\ln(1+e^x) + \frac{e^x}{1+e^x}\right]$ أي: $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$.
0,25	ب/ من أجل كل عدد حقيقي x نضع: $t = e^x$ نجد: $\frac{g(t)}{t} < 0$ (حسب 3.ب/) ومنه نجد:
	$\frac{g(e^x)}{e^x} < 0$ أي: $f'(x) < 0$ ومنه f متناقصة على مجموعة تعريفها.
	- جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $+\infty$
f'(x)	−
f(x)	1 ↘ 0

0,25	ج/ إنشاء (C_f): (أنظر في أخر الصفحة)
	الجزء الثاني: $F(x) = \int_0^x f(t)dt$
0,25	1) لدينا من أجل كل عدد حقيقي t: $\frac{1}{1+e^t} = \frac{1+e^t-e^t}{1+e^t} = \frac{1+e^t}{1+e^t} - \frac{e^t}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$
	2) حساب التكامل بالتجزئة:
1	نضع: $u(t) = \ln(1+e^t)$ $u'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$ ومنه :
	$v'(t) = e^{-t}$ $v(t) = -e^{-t}$

$$F(x)=\left[\ln\left(1+e^{t}\right)\times -e^{-t}\right]_0^x-\int_0^x -e^{-t}\times\frac{e^t}{1+e^t}dt$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\ln 2+\int_0^x\frac{1}{1+e^t}dt$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\ln 2+\int_0^x 1-\frac{e^t}{1+e^t}dt$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\ln 2+\left[t-\ln\left(1+e^t\right)\right]_0^x$$

$$=-e^{-x}\ln(1+e^x)+\ln 2+\left[x-\ln(1+e^x)-\ln 2\right]$$

$$=-f(x)-\left[\ln(1+e^x)-x\right]+2\ln 2$$

$$=-f(x)-\left[\ln(1+e^x)-\ln e^x\right]+2\ln 2$$

$$=-f(x)-\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)+2\ln 2$$

3)حساب المساحة:

0,75

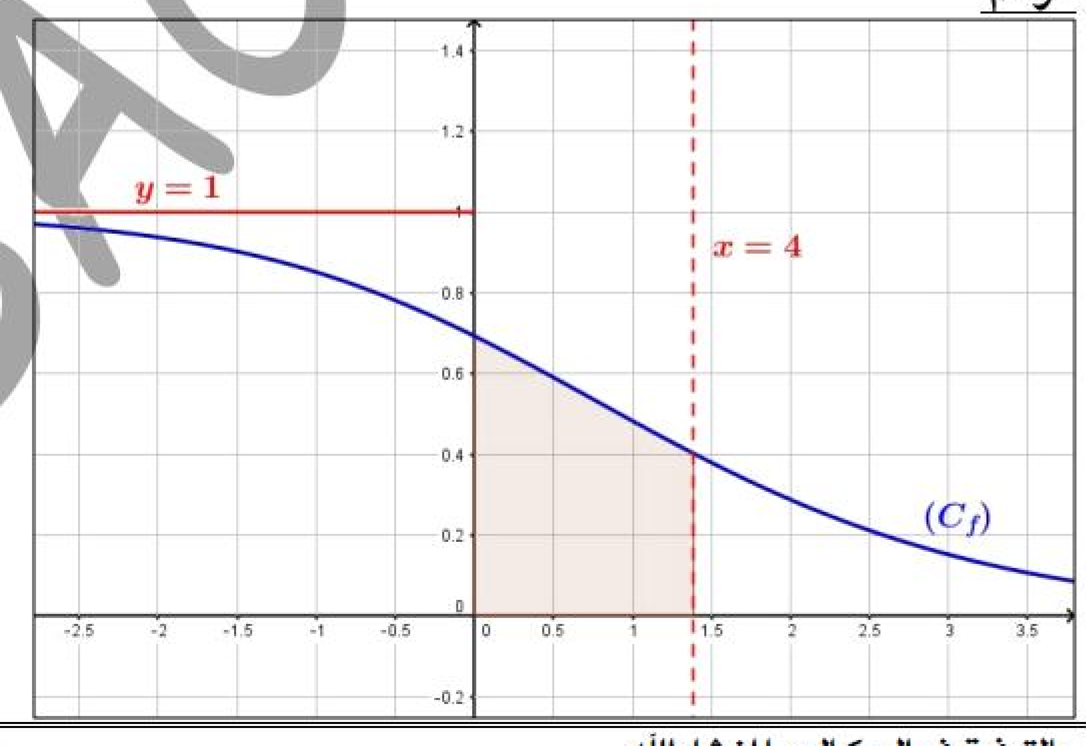
$$S=\int_0^{\ln 4}f(x)dx=\left[-f(x)-\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)+2\ln 2\right]_0^{\ln 4}$$

$$=\left[-\frac{1}{4}\ln 5-\ln\left(\frac{5}{4}\right)+2\ln 2\right]-\left[-\ln\left[2-\ln 2+2\ln 2\right]\right]$$

$$=\frac{-5\ln 5}{4}+4\ln 2(u.a)=\left(\frac{-5\ln 5}{4}+4\ln 2\right)(5\times 2)cm^2=\frac{-25\ln 5}{2}+10\ln 2\ cm^2$$



1



وزارة التربية الوطنية — 2016/05/18 — مديرية التربية لولاية البويرة

ثانوية خالص سليمان - بشلول — المستوي: السنة الثالثة علوم تجريبية

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبي — الموضوع 02

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط) (الهندسة الفضائية)	التنقيط

1) تبيان أن المستقيمان (d) و (Δ) يتقطعان في نقطة D :

لتكن $\vec{u}(-2;1;-1)$ و $\vec{u}'(-1;-4;-2)$ شعاعي توجيه المستقيمين (Δ) و (d) على الترتيب — **1**

بما أن $\frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{-4} \neq \frac{-1}{-2}$ فإن $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ شعاعين غير مرتبطين خطيا و عليه (Δ) و (d) غير متوازيان معناه (Δ) و (d) متقطعان او ليسا من نفس المستوي

- لتكن $D(x;y;z)$ نقطة تقاطع (Δ) و (d) فهي تحقق :

$$\begin{cases} -1-2t=-k & (1) \\ -3+t=-4k+1 & (2) \\ 2-t=-2k+4 & (3) \end{cases}$$

بجمع (2) و (3) نجد: $-1=-6k+5$ ومنه $k=1$ وعليه، من (2) نجد: $t=0$

- من اجل الثنائية $(t;k)=(0;1)$ نجد: $D(-1;-3;2)$.

2) التحقق ان $B\in(\Delta)$ و $C\in(d)$:

من أجل ، $t=1$ نجد ان النقطة B تنتمي الى المستقيم (Δ) — **0,25**

من أجل ، $k=-1$ نجد ان النقطة C تنتمي الى المستقيم (d)

- تبيان أن المثلث BCD قائم :

لدينا، $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2\\8\\4\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ ومنه: $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB}=(2\times-2)+(1\times8)+(-1\times4)=8-8=0$ — **0,25**

إذن $\overrightarrow{DC}\perp\overrightarrow{DB}$ وعليه المثلث BCD قائم في D

3) معادلة المستقيم (P) المعرف بالمستقيمين (d) و (Δ) :

لیكن $\vec{n}(a;b;c)$ الشعاع الناظمي للمستوي (P) و منه نجد: $\begin{cases}\vec{n}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{n}\cdot\vec{u}'=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}-2a+b-c=0\\ -a-4b-2c=0\end{cases}$ — **1**

تكافئ $\begin{cases}-2a+b-c=0 & (1)\\ 2a+8b+4c=0 & (2)\end{cases}$ بالجمع نجد: $9b+3c=0$ أي $c=-3b$

من (1) : $-2a+b-(-3b)=0$ أي $a=2b$

ومنه نجد: $\vec{n}(2b;b;-3b)$;عليه بأخذ: $b=1$ فإن $\vec{n}(2;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

و عليه المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الشكل $2x+y-3+d=0$ مع $d\in\mathbb{R}$

بما ان ، $D\in(P)$ نجد: $2x_D+y_D-3z_D+d=0$ ومنه $d=11$

ومنه: المعادلة الديكارتية للمستوي (P) هي $2x+y-3z+11=0$

4) التحقق أن المستوي $(Q):-4x+y-1=0$ معرف بالمستقيم (d) و النقطة A :

لدينا، $-4x_A+y_A-1=-4(-1)-3-1=4-4=0$ ومنه $A\in(Q)$ ...(1) — **0,5**

$-4(-k)+(-4k+1)-1=+4k-4k+1-1=0$ إذن $(d)\subset(Q)$ ... (2)

من (1) و (2) نجد: $-4x+y-1=0$ هي معادلة المستوي (Q) المعرف بالمستقيم (d) و النقطة A	
5) أ) **تعيين الشرط على α :**	0,25
G مرجح الجملة المثقلة $\{(B,\alpha);(C,-2\alpha);(D,5)\}$ معرفة من اجل : $\alpha-2\alpha+5\neq0$ أي $-\alpha+5\neq0$ أي $\alpha\neq5$	
ب) **إحداثيا ت النقطة G من اجل $\alpha=-1$:**	
من اجل $\alpha=-1$ تكون G مرجح الجملة $\{(B,-1);(C,2);(D,5)\}$ ومنه	
$x_G=\dfrac{-x_B+2x_C+5x_D}{-1+2+5}=\dfrac{3+2-5}{6}=0$ $\quad y_G=\dfrac{-y_B+2y_C+5y_D}{-1+2+5}=\dfrac{2+10-15}{6}=-\dfrac{1}{2}$	0,25
$z_G=\dfrac{-z_B+2z_C+5z_D}{-1+2+5}=\dfrac{-1+10+12}{6}=\dfrac{7}{2}$	
6) **تعيين (S) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث ، $GM^2=36$:**	
لدينا، $GM^2=36$ يكافئ $GM=6$ إذن (S) مجموعة النقط M من الفضاء هي الدائرة ذات المركز G ونصف القطر 6	0,5

تصحيح التمرين الثاني (05 نقاط) (الاعداد المركبة)	التنقيط
I) 1) **حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2+2\sqrt{3}+4=0$:**	
لدينا، $\Delta=(2\sqrt{3})^2-4(1\times4)=12-16=-4$ ومنه : $\begin{cases}z_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+i2}{2}=-\sqrt{3}+i\\ z_2=-\sqrt{3}-i\end{cases}$	0,5
2) **كتابة z_A ، z_B و z_C على الكل الأسي :**	
$z_A=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ، $z_C=2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$	0,75
3) **تبيان ان z_B^{2016} حقيقي :**	
$z_B^{2016}=\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{2016}=2^{2016}e^{i\frac{5\times2016\pi}{6}}=2^{2016}\underbrace{e^{i1680}}_{=1}=2^{2016}$ ومنه z_B^{2016} حقيقي .	0,5
II) 1) **حساب قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$:**	
$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right)=\arg(z_B)-\arg(z_A)=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5\pi-3\pi}{6}=\dfrac{2\pi}{6}=\dfrac{\pi}{3}$	0,25
إستنتاج طبيعة المثلث OAB :	
لدينا، $\begin{cases}(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\dfrac{\pi}{3}\\ OA=OB=2\end{cases}$ وعليه نستنتج أن ، المثلث OAB متقايس الأضلاع .	0,25
2) **إثبات أن OABC معين :**	
لدينا، $\begin{cases}z_{\overrightarrow{OA}}=z_A=2i\\ z_{\overrightarrow{CB}}=z_B-z_C=2i\end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CB}$ إذن OABC متوازي أضلاع	0,5
بما له ضلعان متقبلان متساويان $OA=OB$ فإن OABC معين	
مساحته: $S_{OABC}=2\times S_{OAB}=2\left(\dfrac{1}{2}OA\times OB\times\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=2\left(\dfrac{1}{2}\times2\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\,u.a$	0,25

3) أ) تحديد زاوية الدوران $\mathfrak{R}$:

لدينا الدوران $\mathfrak{R}$ مركزه B ويحول O الى A معناه ، $\mathfrak{R}(O)=A$ ومنه نجد:

$z_A - z_B = e^{i\theta}(z_O - z_B)$ ومنه

$$e^{i\theta}=\frac{z_A-z_B}{z_O-z_B}=\frac{2i+\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^2}{\left(\sqrt{3}-i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}=\frac{2+2\sqrt{3}i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

إذن زاية الدوران $\mathfrak{R}$ هي $\frac{\pi}{3}$. **(0,5)**

ب) الصيغة المركبة للتحاكي $\mathcal{H}$ الذي مركزه B ونسبته 2 :

العبارة المركبة للتحاكي $\mathcal{H}$ الذي مركزه B ونسبته 2 هي من الشكل ،

$z'-z_B=2(z-z_B)$ ومنه $z'=2z-z_B$ أي $z'=2z+\sqrt{3}-i$. **(0,25)**

4) طبيعة التحويل و العناصر المميزة لتحويل $S=\mathfrak{R}\circ\mathcal{H}$:

لدينا S عبارة عن تركيب دوران $\mathfrak{R}$ مركزه B وزاوته $\frac{\pi}{3}$ مع تحاكي $\mathcal{H}$ مركزه B ونسبته 2

إذن نستنتج ان S عبارة عن تشابه مبـــاشر مركزه B و زاوته $\frac{\pi}{3}$ و نسبته 2 **(0,5)**

- الصيغة المركبة للتشابه المباشر S :

الصيغة المركبة له هي من الشكل ، $z'-z_B=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-z_B)$ ومنه نجد:

$z'=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(z+\sqrt{3}-i\right)-\sqrt{3}+i$ ومنه : $z'=\left(1+\sqrt{3}i\right)z+\sqrt{3}+3i$ **(0,25)**

5) طبيعة صورة المعين $OABC$:

لدينا ، التشابه المباشر يحافظ على كبيعة الاشكال الهندسية و بتالي فإن صورة المعين $OABC$ بالتحويل S هو كذلك معين نسميه $O'A'BC'$ حيث : $O'=S(O)\ ;\ A'=S(A)\ ;\ C'=S(C)$ **(0,25)**

و منه مساحته تكون كما يلي : $S_{O'A'BC'}=k^2S_{OABC}=4S_{OABC}=8\sqrt{3}\ \ u.a$ **(0,25)**

تصحيح التمرين الثالث (4 نقاط)	(المتتاليات)	التنقيط

1) أ) إثبات أن المتتالية (W_n) هندسية :

من اجل كل عدد طبيعي n ، (0,75)

$$W_{n+1}=U_{n+1}-V_{n+1}=\frac{U_n+2V_n}{3}-\frac{U_n+4V_n}{5}=\frac{5(U_n+2V_n)-3(U_n+4V_n)}{15}=\frac{2(U_n-V_n)}{15}$$

$$=\frac{2}{15}V_n$$

إذن المتتالية (W_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{15}$ وحدها الأول ، $W_0=U_0-V_0=-1$ (0,25)

ب) كتابة W_n بدلالة n : من اجل كل عدد طبيعي n ، $W_n=W_0\times q^n=-\left(\frac{2}{15}\right)^n$ (0,25)

2) التعبير عن $U_{n+1}-U_n$ و $V_{n+1}-V_n$ بدلالة W_n : (0,5)

$$\begin{cases}U_{n+1}-U_n=\frac{U_n+2V_n}{3}-U_n=\frac{U_n+2V_n-3U_n}{3}=\frac{V_n-U_n}{3}=-\frac{U_n-V_n}{3}=-\frac{1}{3}W_n\\ V_{n+1}-V_n=\frac{U_n+4V_n}{5}-V_n=\frac{U_n+4V_n-5V_n}{5}=\frac{U_n-V_n}{5}=\frac{1}{5}W_n\end{cases}$$

♦ **إستنتاج إتجاه تغير كل من المتتالين (U_n) و (V_n) :**

- من اجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1}-U_n=-\frac{1}{3}W_n=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{15}\right)^n$ وعليه : $U_{n+1}-U_n>0$ (0,25)

و منه المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

- من اجل كل عدد طبيعي n ، $V_{n+1}-V_n=\frac{1}{5}W_n=-\frac{1}{5}\left(\frac{2}{15}\right)^n$ وعليه : $V_{n+1}-V_n<0$ (0,25)

و منه المتتالية (V_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

♦ **تبيان أن (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان :**

(U_n) متزايدة تماما و (V_n) متناقصة تماما و $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n-V_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}W_n=\lim\limits_{n\to+\infty}-\left(\frac{2}{15}\right)^n=0$ (0,5)

إذن (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان

3) أ) إثبات أن المتتالية (t_n) :

من اجل كل عدد طبيعي n ، (0,5)

$$t_{n+1}=3U_{n+1}+10V_n=3\left(\frac{U_n+2V_n}{3}\right)+10\left(\frac{U_n+4V_n}{5}\right)=U_n+2V_n+2(U_n+4V_n)=3U_n+10V_n=t_n$$

إذن المتتالية (t_n) ثابتة .

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=t_0=3U_0+10V_0=3+20=23$ (0,25)

ب) تعيين نهاية المتتاليتين (U_n) و (V_n) : (0,5)

بما أن (U_n) و (V_n) متتاليتان متجاورتان فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\ell$

لدينا ، $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(3U_n+10V_n)$ ومنه $23=3\ell+10\ell=13\ell$ ومنه $\ell=\frac{23}{13}$

إذن: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\frac{23}{13}$

الجزء 01: حساب $F'(x)$: من اجل كل عدد حقيقي x ، $F'(x)=\alpha-\frac{\beta e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}$ — 0,25

- تعيين العددين الحقيقيين β ; α :

$F(1)=\frac{e}{1+e}$ و منه $\alpha+\frac{\beta}{1+e}=\frac{e}{1+e}$ إذن $\alpha(1+e)+\beta=e$ — 0,25

و $F'(0)=\frac{5}{4}$ ومنه $\alpha-\frac{\beta}{4}=\frac{5}{4}$ إذن $4\alpha-\beta=5$

ومنه يكون حل الجملة $\begin{cases}\alpha(1+e)+\beta=e\\4\alpha-\beta=5\end{cases}$ هو الحل الوحيد $(\alpha,\beta)=(1,-1)$.

الجزء الثاني

1. حساب النهايات: — 0,5

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left[x-\frac{1}{1+e^{x}}\right]=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x-\frac{1}{1+e^{x}}\right]=+\infty$

2. من اجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=1+\frac{e^{x}}{(1+e^{x})^{2}}$ و منه نجد: $f'(x)>0$ — 0,25

جدول تغيرات الدالة f . — 0,25

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3. أ)تعيين المستقيمات المقاربة: — 0,25

لدينا، $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to+\infty}\left[\cancel{x}-\frac{1}{1+e^{x}}-\cancel{x}\right]=0$ إذن $(\Delta_1):y=x$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f). بجوار $+\infty$ — 0,25

لدينا، $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}\left[\cancel{x}-\frac{1}{1+e^{x}}-\cancel{x}+1\right]=0$ إذن $(\Delta_2):y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f). بجوار $-\infty$

ب) الوضع النسبي : — 0,25

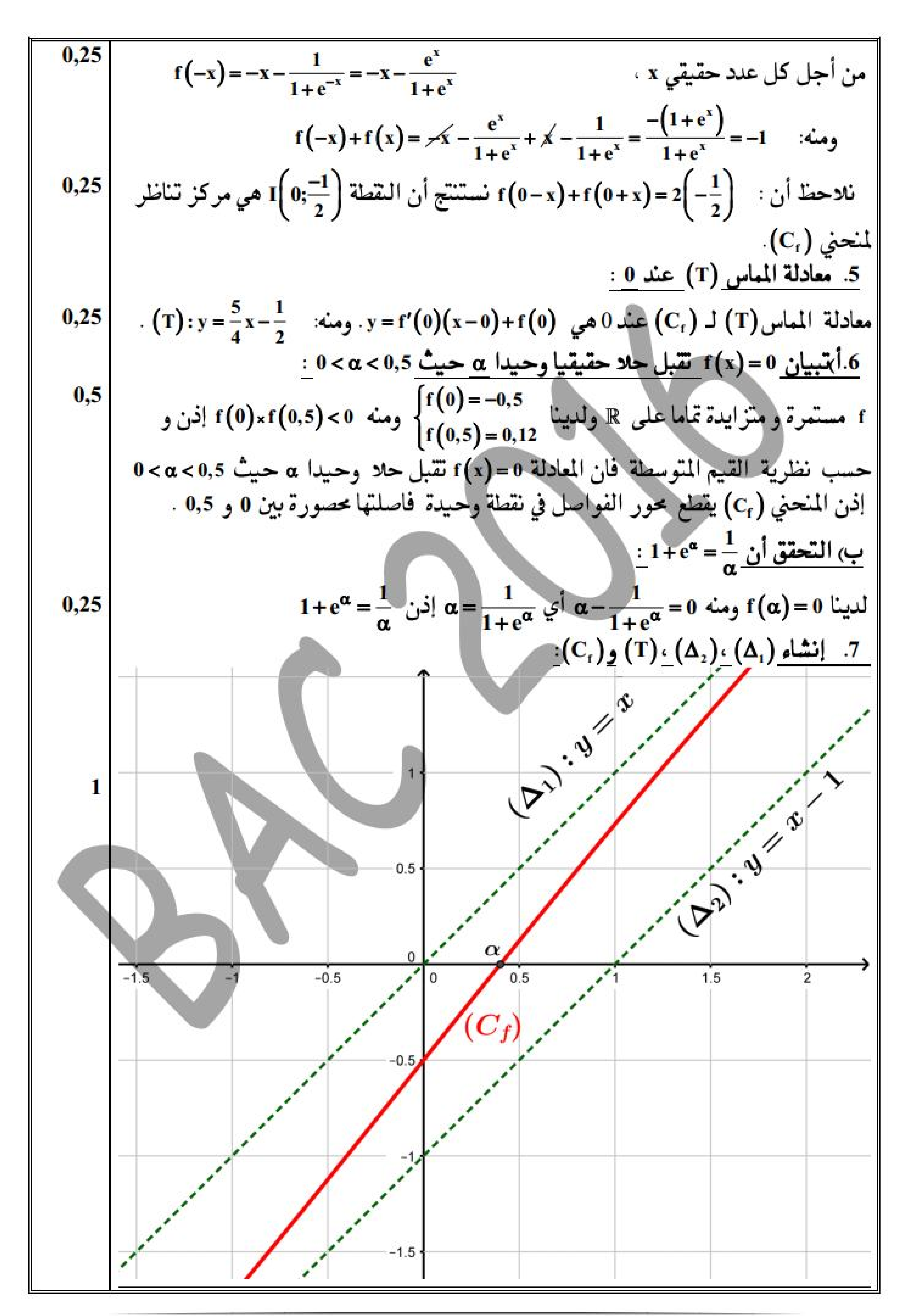
من اجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)-x=-\frac{1}{1+e^{x}}$ و عليه : $f(x)-x<0$

إذن (C_f) تحت (Δ_1) .

من اجل كل عدد حقيقي x ، $f(x)-y=-\frac{1}{1+e^{x}}+1=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$ و عليه : $f(x)-x>0$ — 0,25

إذن (C_f) فوق (Δ_2) .

4. التحقق أن $f(-x)+f(x)=-1$:



من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(-x)=-x-\frac{1}{1+e^{-x}}=-x-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$ **0,25**

ومنه: $f(-x)+f(x)=-x-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}+x-\frac{1}{1+e^{x}}=\frac{-(1+e^{x})}{1+e^{x}}=-1$

نلاحظ أن : $f(0-x)+f(0+x)=2\left(-\frac{1}{2}\right)$ نستنتج أن النقطة $I\left(0;\frac{-1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f). **0,25**

5. معادلة المماس (T) عند 0 :

معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند 0 هي $y=f'(0)(x-0)+f(0)$. ومنه: $(T): y=\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}$. **0,25**

6.أ)تبيان $f(x)=0$ تقبل حلا حقيقيا وحيدا α حيث $0<\alpha<0,5$:

f مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا $\begin{cases} f(0)=-0,5 \\ f(0,5)=0,12 \end{cases}$ ومنه $f(0)\times f(0,5)<0$ إذن و حسب نظرية القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0<\alpha<0,5$ **0,5**

إذن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها محصورة بين 0 و 0,5 .

ب) التحقق أن $1+e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$:

لدينا $f(\alpha)=0$ ومنه $\alpha-\frac{1}{1+e^{\alpha}}=0$ أي $\alpha=\frac{1}{1+e^{\alpha}}$ إذن $1+e^{\alpha}=\frac{1}{\alpha}$ **0,25**

7. إنشاء (Δ_1)، (Δ_2)، (T) و (C_f): **1**

8. المناقشة البيانية :

(0,5) المعادلة $m=\frac{1}{1+e^x}$ تكافئ $-m=-\frac{1}{1+e^x}$ تكافئ $x-m=x-\frac{1}{1+e^x}$ أي $f(x)=x-m$

وعليه حلولها يعود الى تعيين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x-m$

المناقشة:

- $-m\geq 0$ أي $m\leq 0$: المعادلة لا تقبل حلول
- $-1<-m<0$ أي $0<m<1$: المعادلة تقبل حل وحيد
- $-m\leq -1$ أي $m\geq 1$: المعادلة لا تقبل حلول

9) نعتبر المتتالية $(u_n);n\in\mathbb{N}^*$ المعرفة كما يلي : $u_n=\int_\alpha^n\left(x-f(x)\right)dx$.

(0,25) **أ)التفسير الهندسي لـ u_n :**

u_n هي المساحة المحصورة بين المستقيم المقارب (Δ_1) الذي معادلته $y=x$ و البيان (C_f) و المستقيمين الذين معادلتيهما $x=\alpha$ و $x=n$

(0,25) ب) **التحقق :**

لدينا، $x-f(x)=\cancel{x}-\cancel{x}+\frac{1}{1+e^x}$ و $1-\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^x}$

إذن $x-f(x)=1-\frac{e^x}{1+e^x}$

(0,5) **ج) حساب u_n بدلالة n :**

لدينا، $u_n=\int_\alpha^n\left(x-f(x)\right)dx$ ومنه $u_n=\int_\alpha^n\left(1-\frac{e^x}{1+e^x}\right)dx$ ومنه $u_n=\left[x-\ln\left(1+e^x\right)\right]_\alpha^n$

أي $u_n=n-\ln\left(1+e^n\right)-\alpha+\ln\left(1+e^\alpha\right)=n-\ln\left(1+e^n\right)-\alpha-\ln\alpha=\boxed{\ln\left(\frac{e^n}{1+e^n}\right)-\alpha-\ln\alpha}$

(0,5) **د) حساب $\lim_{n\to+\infty}u_n$:**

لدينا $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{e^n}{1+e^n}\right)-\alpha-\ln\alpha\right)$ و $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{e^n}{1+e^n}\right)=\ln 1=0$

إذن: $\lim_{n\to+\infty}u_n=-(\alpha+\ln\alpha)$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية الوادي | **امتحان البكالوريا التجريبية**

الشعبة : علوم تجريبية | **دورة ماي 2016**

ثانويات : البياضة الجديدة – حميداتو أحمد – حساني عبد الكريم – داسي خليفة – دوار الماء – كركوبية خليفة – لبامة – لقرع محمد الضيف – سيدي عون – شعباني عباس – علي حنكة – العقلة – هواري بومدين.

اختبار في مادة الرياضيات | **المدة : 3 ساعات و 30 دقيقة**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ نعتبر النقط : $A(0,-2,2)$ ، $B(3,1,5)$ ، $C(3,-2,-1)$ و $E(-3,4,-1)$.

1- حدد طبيعة المثلث ABC.

2- اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A و الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظمي له.

3- نعتبر المستوي (Q) تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = t+\alpha \\ y = 2t-2 \\ z = t+\alpha+2 \end{cases}$ $t,\alpha \in \mathbb{R}$

أ) تحقق أن النقطة A تنتمي للمستوي (Q)

ب) بين أن الشعاع $\vec{n}(1,0,-1)$ ناظمي للمستوي (Q).

4- عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q).

5- بين أن المستقيم (AE) عمودي على المستوي (ABC) .

6- أ) احسب حجم رباعي الوجوه $EABC$ ، ثم عين قيسا للزاوية BEC.

ب)احسب مساحة المثلث BEC ، ثم استنتج بعد النقطة A عن المستوي (BEC).

التمرين الثاني : (03.5 نقطة)

(U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0=-6$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+2n-1$

1- أ) برهن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 3$ أن : $U_n>0$

ب) أكتب U_n بدلالة U_{n-1} ، ثم استنتج من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 4$ أن : $U_n>2n-3$

جـ) احسب نهاية المتتالية (U_n).

2- (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n=U_n-4n+10$

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية احسب أساسها و حدها الأول.

ب) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n أن : $U_n=2^{2-n}+4n-10$

جـ) احسب بدلالة n المجموع : $S_n=U_0+U_1+........+U_n$

التمرين الثالث: (05 نقط)

1- $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $P(z)=z^3-3z^2+3z+7$

أ) احسب $P(-1)$ ، ثم عين العددين الحقيقين a و b حتى يكون : $P(z)=(z+1)(z^2+az+b)$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

2- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ نعتبر النقط A ، B ، C و G لواحقها على الترتيب

$z_A=-1$ ، $z_B=2+i\sqrt{3}$ ، $z_C=2-i\sqrt{3}$ و $z_G=3$

أ) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B-z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا.

ب)احسب الأطوال AB ، AC و BC ، ثم عين طبيعة المثلث ABC.

3- أ) اكتب $\dfrac{z_A-z_C}{z_G-z_C}$ على الشكل الأسي ، ثم استنتج أن A صورة G بتحويل نقطي يطلب تعيينه.

ب) جد مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACG.

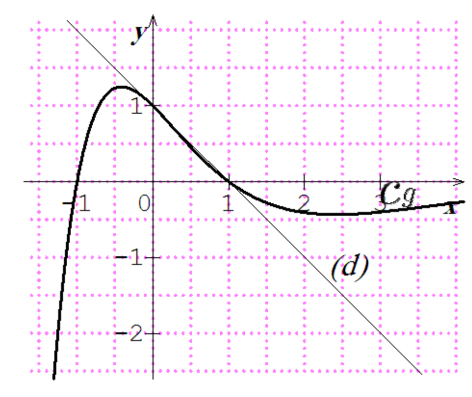
4- أ) بين أن النقطة G مرجح الجملة $\{(A,-1),(B,2),(C,2)\}$.

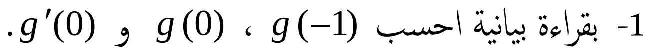
ب) عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{CM}\right\|=\left\|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\right\|$

5- أنشئ النقطة H لاحقتها $z_H=1+e^{i\frac{\pi}{6}}$ دون حساب ، ثم عين بطريقة هندسية عمدة للعدد المركب z_H .

التمرين الرابع : (06.5 نقطة)

I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=(1+ax^2)e^{bx}$ حيث a و b عددان حقيقيان ، C_g تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إل معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$ و (d) مماس C_g في النقطة فاصلتها 0 ، (أنظر الشكل المقابل)





1- بقراءة بيانية احسب $g(-1)$ ، $g(0)$ و $g'(0)$.

2- اكتب معادلة للمماس (d).

3- باستعمال المعطيات السابقة بين أن : $g(x)=(1-x^2)e^{-x}$

II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(1+x)^2e^{-x}$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إل معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أ) عين دون حساب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) اكتب معادلة لـ : (Δ) مماس C_f عند النقطة فاصلتها 0.

4- أ) أنشئ C_f و (Δ).

ب) عين قيم الوسيط m حتى يكون للمعادلة : $f(x)=m$ حل سالب.

5- h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x)=f(x^2)-1$

- دون كتابة عبارة الدالة h احسب $h'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقط)

1- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط A، B و C لواحقها على الترتيب :

$z_A=1+3i$ ، $z_B=2+4i$ ، $z_C=1+z_A$

أ) اكتب z_B-z_A على الشكل الأسي .

ب) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

2- أ) اكتب العبارة المركبة للتحاكي T الذي مركزه G و نسبته 2-

ب) عين احداثي النقطة H سابقة النقطة C بالتحويل T ، ثم تحقق أن H منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

3- (γ) مجموعة النقط M لاحقتها z حيث : $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{4}}$ و k يتغير في $\mathbb{R}_+$.

أ) عين قيسا للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$

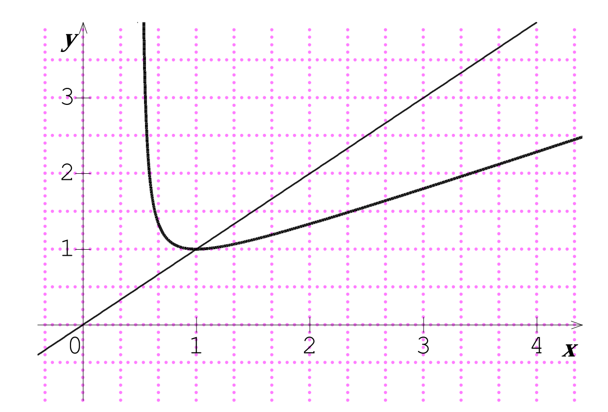
ب) تحقق أن المجموعة (γ) هي نصف المستقيم $[AB)$.

4- بين أن : $\dfrac{z_C-z}{z_B-z_A}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}-k\right)$ ، ثم تحقق أن النقطة H تنتمي إلى (γ).

- استنتج أن المستقيمين (AB) و (CH) متعامدان.

التمرين الثاني: (04 نقط)

(U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0=4$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}=\dfrac{U_n^{\ 2}}{2U_n-1}$



f دالة معرفة على $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$ ، C_f تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم معادلته : $y=x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس (أنظر الشكل المقابل)

1- أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 دون حسابها.

ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها.

2- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن : $U_n\geq 1$

3- (V_n) متتالية معرفة من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ بـ : $V_n=\ln\left(1-\dfrac{1}{U_n}\right)$

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية احسب أساسها و حدها الأول.

ب) اكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج أن : $U_n=\dfrac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$.

جـ) تحقق من صحة تخمينك السابق ، فيما يخص اتجاه التغير و التقارب.

التمرين الثالث : (05 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر المستقيم (Δ) المار بالنقطة $A(-3,-1,-3)$

و $\vec{u}(2,-2,-1)$ شعاع توجيه له ، و المستقيم (d) تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = t+3 \\ y = 2t+2 \\ z = -2t+3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1- أ) تحقق أن النقطة $B(3,2,3)$ تنتمي للمستقيم (d) .

ب) بين أن المستقيمين (Δ) و (d) متعامدين ، و ليسا من نفس المستوي.

جـ) اكتب معادلة ديكارتية للمستوي الذي يحوي (Δ) و يوازي (d).

2- (S) سطح كرة مركزها $C(-1,0,-1)$ و نصف قطرها 6. و (P) مستو معادلته : $2x+y+2z+13=0$

أ) أثبت أن (S) و (P) يتقاطعان وفق دائرة مركزها A ، يطلب تعيين نصف قطرها. .

ب) بين أن المستقيم (d) مماس لسطح الكرة في النقطة B .

3- أ) احسب AB ، ثم استنتج أن النقطة C تنتمي للقطعة المستقيمة $[AB]$.

ب) عين مستقيما عموديا على كل من المستقيمين (Δ) و (d).

التمرين الرابع: (07 نقط)

I - g و h دالتان معرفتان على $D=]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=x-1-\ln x$ و $h(x)=x+(x-2)\ln x$

1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- استنتج حسب قيم x من D إشارة $g(x)$.

3- أ) تحقق من أجل كل x من D أن : $h(x)=1+g(x)+(x-1)\ln x$

ب) أثبت من أجل كل x من D أن: $(x-1)\ln x \geq 0$ ، ثم استنتج أن : $h(x)>0$

II - f دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $f(x)=1+x\ln(x)-(\ln x)^2$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إل معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثم $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا.

2- بين من أجل كل x من D أن : $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x}$ ، ادرس اتجاه تغير الدالة f $]0,+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أ) اكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس C_f عند النقطة $A(1,1)$.

ب) بين من أجل كل x من D أن : $f(x)-x=(-1+\ln x)g(x)$

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى C_f و الماس (Δ) ، هل أن A نقطة انعطاف للمنحنى C_f ؟

4- أنشئ C_f و (Δ). (تعطى فاصلة نقطة تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل $x_0 \simeq 0.5$)

5- أ) بين أن الدالة : $x \mapsto \left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\ln(x)-\dfrac{x^2}{4}-x-x\left(\ln(x)\right)^2$ دالة أصلية للدالة f على $]0,+\infty[$

ب) احسب التكامل : $\int_1^e \left(x-f(x)\right)dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

الحل المختصر للبكالوريا التجريبية

حل التمرين 01	النقطة
-1 $\overrightarrow{AB}(3,3,3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3,0,-3)$ ، $\overrightarrow{BC}(0,-3,-6)$ ، $AB=\sqrt{27}$ ، $AC=\sqrt{18}$ ، $BC=\sqrt{45}$ ، إذن المثلث قائم في A .	0.5
-2 $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي **إذن:** $3x+3y+3z+d=0$ نعوض بإحداثيات A نجد : $d=0$ و منه: $3x+3y+3z=0$ نقسم على 3 نجد : $(p):x+y+z=0$	0.5
-3 أ) نعوض بإحداثيات A نجد : $\begin{cases}0=t+\alpha\\-2=2t-2\\2=t+\alpha+2\end{cases}$ و منه: $\begin{cases}t=\alpha=0\\t=0\\t=\alpha=0\end{cases}$ إذن : $A\in(P)$	0.5
ب) من التمثيل الوسيطي شعاعي توجيه (Q) هما : $\vec{u}(1,2,1)$ و $\vec{v}(1,0,1)$ لدينا : $\vec{n}(1,0,-1)$ و منه: $\vec{n}\bullet\vec{u}=0$ و $\vec{n}\bullet\vec{v}=0$ و منه : $\vec{n}$ شعاع ناظمي لـ : (Q)	0.5
-4 نعين معادلة للمستوي (Q): $\vec{n}$ شعاع ناظمي **إذن:** $x-z+d=0$ نعوض بإحداثيات A نجد : $d=2$ و منه: $x-z+2=0$ نحل الجملة : $\begin{cases}x+y+z=0\\x-z+2=0\end{cases}$ ، نضع $z=t$ و منه : $\begin{cases}x=\alpha-2\\y=-2\alpha+2\\z=\alpha\end{cases},\alpha\in\mathbb{R}$	0.5
-5 $\overrightarrow{AE}(-3,6,-3)$، و $\overrightarrow{AE}$ عمودي على (ABC) يعني: $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{AC}$ لدينا : $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{AB}=0$ و $\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{AC}=0$ و هـ م.	0.5
-6 أ) $AE=\sqrt{54}$ و $AC=\sqrt{18}$ و $AB=\sqrt{27}$ $V_{EABC}=\frac{1}{3}AE\times S_{ABC}=\frac{1}{3}AE\times\frac{1}{2}AB\times AC=27uv$ لدينا : $\overrightarrow{EB}(6,-3,6)$ و $\overrightarrow{EC}(6,-6,0)$ و منه: $\lVert\overrightarrow{EB}\rVert=9$ و $\lVert\overrightarrow{EC}\rVert=\sqrt{72}$ إذن : $\cos BEC=\frac{\overrightarrow{EB}\bullet\overrightarrow{EC}}{\lVert\overrightarrow{EB}\rVert\times\lVert\overrightarrow{EC}\rVert}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ و منه الزاوية : $BEC=\frac{\pi}{4}$.	0.5 0.5
ب) مساحة المثلث BEC: $S_{BEC}=\frac{1}{2}BE\times EC\times\sin BEC=\frac{1}{2}\times9\times\sqrt{72}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=27us$ $V_{EABC}=\frac{1}{3}\times d(A,(BEC))\times S_{BEC}$ ، و منه : $d(A,(BEC))=\frac{3\times27}{27}=3$	0.5 0.5
حل التمرين 02	
-1 أ) $U_1=-4$ و $U_2=-1$ و $U_3=\frac{5}{2}$ البرهان بالتراجع : $U_3=\frac{5}{2}>0$ ، و منه : $P(3)$ محققة. نفرض من أجل كل عدد طبيعي $n\geq3$ أن : $U_n>0$ صحيحة. نضرب في $\frac{1}{2}$ نجد : $\frac{1}{2}U_n>0$ ....(1)	0.75

و من جهة أخرى: $n\geq 3$ نضرب في 2 و نطرح 1 نجد: $2n-1\geq 5$ ....(2)

بجمع (1) و (2) نجد : $\frac{1}{2}U_n+2n-1>5$ ، و منه: $U_{n+1}>5$ إذن : $U_{n+1}>0$.

(0.25)

ب) لدينا : $U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+2n-1$ ومنه : $U_{(n-1)+1}=\frac{1}{2}U_{n-1}+2(n-1)-1$

إذن : $U_n=\frac{1}{2}U_{n-1}+2n-3$

(0.5)

من السؤال 1 لدينا : $U_n>0$ و منه : $U_{n-1}>0$ ، نضرب في $\frac{1}{2}$ نجد : $\frac{1}{2}U_{n-1}>0$ ....(1)

و بما أن: $n\geq 4$ ، نضرب في 2 و نطرح 3 نجد : $2n-3>5$ و منه: $2n-3>0$ ....(2)

بجمع (1) و (2) نجد : $\frac{1}{2}U_{n-1}+2n-3>2n-3$ و بالتالي : $U_n>2n-3$.

(0.25)

جـ) لدينا : $U_n>2n-3$ بالمرور إلى النهاية نجد: $\lim U_n>\lim\limits_{n\to+\infty}2n-3$ و منه: $\lim U_n=+\infty$

(0.5)

2- أ) $V_n=U_n-4n+10$ و منه : $V_{n+1}=U_{n+1}-4(n+1)+10$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{U_{n+1}-4(n+1)+10}{U_n-4n+10}=\frac{\frac{1}{2}U_n-2n+5}{U_n-4n+10}=\frac{1}{2}$$

و منه الاساس : $q=\frac{1}{2}$ ،

(0.25)

و حدها الأول : $V_0=U_0-4\times 0+10=4$

(0.5)

ب) لدينا : $V_n=4\left(\frac{1}{2}\right)^n=2^2\times\frac{1}{2^n}=2^{2-n}$

و $V_n=U_n-4n+10$ إذن : $U_n=V_n+4n-10$ بالتعويض : $U_n=2^{2-n}+4n-10$

(0.5)

جـ) S_n هي مجموع المتتالية الهندسية (V_n) و المتتالية الحسابية حدها العام : $4n-10$

$$S_n=4\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{2}-1}+\frac{n+1}{2}(-10+4n-10)=-8\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right)+\frac{n+1}{2}(-20+4n)$$

التمرين 03

(0.25)

1- أ) $P(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+3(-1)+7=0$

(0.5)

	1	-3	3	7
$\alpha=-1$	1	-4	7	0

و منه : $P(z)=(z+1)(z^2-4z+7)$.

(0.75)

ب) $P(z)=0$ يعني أن : $(z+1)(z^2-4z+7)=0$ ، إذن : إما $z+1=0$ و منه : $z=-1$

أو $z^2-4z+7=0$ ، لدينا : $\Delta=-12$ ، و منه : $z_1=2+i\sqrt{3}$ و $z_1=2-i\sqrt{3}$

(0.5)

2- أ) لدينا : $(z_B-z_A)^n=(2+i\sqrt{3}-(-1))^n=(3+i\sqrt{3})^n$

$3+i\sqrt{3}=2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ و منه : $(z_B-z_A)^n=\left(2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n=\left(2\sqrt{3}\right)^n\times e^{i\frac{n\pi}{6}}$

$(z_B-z_A)^n$ عدد حقيقي سالب يعني أن : $e^{i\frac{n\pi}{6}}=e^{i(2k+1)\pi}$ ، و منه : $n=12k+6$

0.5	ب) $AB=\lvert z_B-z_A\rvert=2\sqrt{3}$ و $AC=\lvert z_C-z_A\rvert=\lvert 3-i\sqrt{3}\rvert=2\sqrt{3}$ $BC=\lvert z_C-z_B\rvert=\lvert -2i\sqrt{3}\rvert=2\sqrt{3}$ و منه المثلث ABC متقايس الاضلاع.
0.5 0.5	3- أ) $\frac{z_A-z_C}{z_G-z_C}=\frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}=i\sqrt{3}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ و منه: $z_A-z_C=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}(z_G-z_C)$: و منه A صورة G بالتشابه مركزه C و زاويته : $q=\frac{\pi}{2}$. و نسبته $\sqrt{3}$.
0.5	ب) المثلث ACG قائم في C و منه I مركز الدائرة المحيطية هو منتصف $[AG]$ أي: $z_I=1$ و نصف قطرها : $R=\lvert z_I-z_A\rvert=2$
0.25	4- أ) $x_G=\frac{-1(-1)+2(2)+2(2)}{-1+2+2}=3$ و $y_G=\frac{-1(0)+2(\sqrt{3})+2(-\sqrt{3})}{-1+2+2}=0$
0.25	ب) لدينا : $\lVert\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{CM}\rVert=\lVert\overrightarrow{BC}\rVert=2\sqrt{3}$ و $\lVert-\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{CM}\rVert=3\lVert\overrightarrow{GM}\rVert$ و منه : $\lVert\overrightarrow{GM}\rVert=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ و هي الدائرة مركزها G و نصف قطرها $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
0.25 0.25	5- لدينا : $z_H=1+e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، هذه الكتابة تعني أن H تنتمي إلى تقاطع الدائرة مركزها النقطة I لاحقتها $z_I=1$ و نصف المستقيم $[IH)$ باستثناء ω الذي يحقق : $arg(z_I-z_H)=\frac{\pi}{6}$ $HOK=\frac{1}{2}HIK$ لأنهما زاوية مركزية و زاوية محيطية و تحصران نفس القوس. و $\arg(z_H)=HOK=\frac{\pi}{6}$ ، إذن : $HOK=\frac{\pi}{12}$
	التمرين الرابع
0.75	*I*- 1- $g(-1)=0$ و $g(0)=1$ المماس (d) يمر بالنقطتين $(-1,0)$ و $(0,1)$ و منه : $g'(0)=\frac{1-0}{0-1}=-1$
0.25	2- معادلة للمماس (d): $y=g'(0)(x-0)+g(0)$ و منه : $y=-x+1$
0.5	3- $g(x)=(1+ax^2)e^{bx}$ و منه: $g(-1)=(1+a)e^{-b}=0$ إذن : $a=-1$ و $g'(x)=(2ax+b+bax^2)e^{bx}$ و منه: $g'(0)=be^0=-1$ إذن : $b=-1$ و منه : $g(x)=(1-x^2)e^{-x}$
0.5	*II*- 1- $\lim_{x\to-\infty}(1+x)^2e^{-x}=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(1+x)^2e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}+\frac{2x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)=0$
01	2- $f'(x)=\left(2x+2-(1+x)^2\right)e^{-x}=(1-x^2)e^{-x}=g(x)$ و إشارة $g(x)$ من إشارة $(1-x^2)$ g متزايدة على المجال $[-1,1]$ ، و متناقصة على المجالين $]-\infty,-1]$ و $[1,+\infty[$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

الإجابة	العلامة
3- أ) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=f'(0)=g(0)=1$ ، التفسير: المنحنى يقبل مماسا عند $(0,1)$ معامل توجيهه 1.	0.5
ب) معادلة لـ : (Δ) مماس C_f عند النقطة فاصلتها 0 : $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ و منه : $y=x+1$	0.5
4- أ) إنشاء C_f و (Δ).	01
ب) قيم الوسيط m هي : $\left]\frac{4}{e},+\infty\right[$ و $m=0$	0.5
5- $h'(x)=2xf'(x^2)=2x(1-x^4)e^{-x^2}$ $\lim_{x\to-\infty}f(x^2)-1=\lim_{x\to+\infty}f(x)-1=-1$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x^2)-1=\lim_{x\to+\infty}f(x)-1=-1$	01

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	-1	↗	$\frac{4}{e}-1$	↘	0	↗	$\frac{4}{e}-1$	↘	-1

الموضوع الثاني

التمرين الأول	النقطة
1- أ) $z_B-z_A=1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	0.25
ب) $z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}=\frac{5}{3}+i\frac{10}{3}$	0.25
1- أ) $z'-z_G=-2(z-z_G)$ بالتعويض : $z'-\frac{5}{3}-i\frac{10}{3}=-2\left(z-\frac{5}{3}-i\frac{10}{3}\right)$	0.5
ب) $z_C-\frac{5}{3}-i\frac{10}{3}=-2\left(z_H-\frac{5}{3}-i\frac{10}{3}\right)$ ، و منه : $z_H=\frac{3}{2}+i\frac{7}{2}$ $\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i=z_H$ و منه هي منتصف القطعة $[AB]$.	0.5 0.25
3- أ) $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)=\arg(z_{\overrightarrow{AB}})=\arg(z_B-z_A)=\arg\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{\pi}{4}$	0.25
ب) لدينا : $z=z_A+ke^{i\frac{\pi}{4}}$ ، و منه : $z-z_A=ke^{i\frac{\pi}{4}}$ إذن: $\lvert z-z_A\rvert=\left\lvert ke^{i\frac{\pi}{4}}\right\rvert=k$ و $k\in\mathbb{R}_+$ و النقطة B تحقق المعادلة لأن : $z_B-z_A=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، إذن هي نصف المستقيم $[AB)$.	0.5
4- $\frac{z_C-z}{z_B-z_A}=\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}-\frac{z-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}-\frac{ke^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}-\frac{k}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}-k\right)$ نعوض بـ : z_H نجد : $z_H-z_A=\frac{3}{2}+i\frac{7}{2}-(1+3i)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}(1+i)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	0.5

0.5 0.5	بالمطابقة مع $z - z_A = ke^{i\frac{\pi}{4}}$: نجد $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و منه : النقطة H تنتمي إلى (γ). لدينا : $\frac{z_C - z_H}{z_B - z_A} = \frac{\frac{1}{2}(1-i)}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ و منه نستنتج أن (AB) و (CH) متعامدان
	التمرين الثاني
0.75	1- أ) تمثيل على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 دون حسابها.
0.25	ب) التخمين المتتالية (U_n) متناقصة و متقاربه نحو 1 .
0.75	2- البرهان بالتراجع : $U_0 = 4 \geq 1$ و بالتالي : $P(0)$ محققة . نفرض أن : $U_n \geq 1$ صحيحة. ، و بما أن قيم المتتالية تنتمي للمجال $[1,4]$ و الدالة متزايدة على هذا المجال و بالتالي : $f(U_n) \geq f(1)$ ، و لدينا : $f(1)=1$ ، و منه : $U_{n+1} \geq 1$
0.75	3- أ) $V_n = \ln\left(1-\frac{1}{U_n}\right) = \ln\left(\frac{U_n - 1}{U_n}\right)$ و منه : $V_{n+1} = \ln\left(1-\frac{1}{U_{n+1}}\right) = \ln\left(1-\frac{2U_n - 1}{U_n^2}\right) = \ln\left(\frac{U_n - 1}{U_n}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{U_n - 1}{U_n}\right)$ $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{2\ln\left(\frac{U_n - 1}{U_n}\right)}{\ln\left(\frac{U_n - 1}{U_n}\right)} = 2$ و منه المتتالية هندسية $q=2$ ، و حدها الأول : $V_0 = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$
0.5	ب) $V_n = \ln\left(\frac{3}{4}\right) \times 2^n$ نعوض : $\ln\left(\frac{3}{4}\right) \times 2^n = \ln\left(1-\frac{1}{U_n}\right)$ و منه : $\ln\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} = \ln\left(1-\frac{1}{U_n}\right)$ إذن: $\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n} = 1-\frac{1}{U_n}$ و بالتالي: $U_n = \frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$.
0.5	جـ) التحقق من صحة تخمينك السابق ، فيما يخص اتجاه التغير و التقارب: $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n+1}}} - \frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}\left[-1+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]}{\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n+1}}\right)\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}\right)} < 0$ و منه متناقصة .

التقارب : $\lim U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}} = \frac{1}{1-0} = 1$	0.5
التمرين الثالث	
1- أ) نعوض بإحداثيات النقطة نجد : $\begin{cases}3=t+3\\2=2t+2\\3=-2t+3\end{cases}$ و منه: $\begin{cases}t=0\\t=0\\t=0\end{cases}$ إذن النقطة تنتمي.	0.25
ب) لدينا $\vec{u}(2,-2,-1)$ و شعاع توجيه (d) هو : $\vec{v}(1,2,-2)$ و منه : $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$ و بالتالي متعامدان. المستقيمان ليسا من نفس المستوي يعني أنهما ليسا متوازيين ولا متقاطعين. $\frac{2}{1}\neq\frac{-2}{2}\neq\frac{-1}{-2}$ و بالتالي هما غير متوازيين. ندرس التقاطع بحل الجملة: $\begin{cases}2\alpha-3=t+3........(1)\\-2\alpha-1=2t+2....(2)\\\alpha-3=-2t+3......(3)\end{cases}$ بجمع (1) و (2) نجد : $t=-3$ نعوض في (1) نجد : $\alpha=\frac{3}{2}$ نعوض في المعادلة (3) نجد : $\frac{3}{2}-3=-2(-3)+3$ و منه : $-\frac{3}{2}=9$ مستحيل و بالتالي غير متقاطعين.	01
جـ) المستوي يحوي (Δ) و يوازي (d) و هما ليسا من نفس المستوي إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعي توجيه للمستوي $\vec{n}\bullet\vec{u}=2a-2b-c=0$ و $\vec{n}\bullet\vec{v}=a+2b-2c=0$ و منه : $\vec{n}(2,1,2)$ و بالتالي : $2x+y+2z+d=0$ ، نعوض بإحداثيات A نجد : $2x+y+2z+13=0$	0.5
0- أ) $d(C,(P))=3$ و لدينا : $d(C,(P))=\frac{5}{3}<r=6$ و منه متقاطعان وفق دائرة. و لإثبات أن A مركز الدائرة (S) نثبت أن A مسقط عمودي لـ : C على (P) نعوض بإحداثيات A في معادلة (P) نجد : $A\in(P)$. و نثبت أن : $\overrightarrow{AC}(2,1,2)$ يوازي $\vec{n}(2,1,2)$. $\overrightarrow{AC}=\vec{n}$ ، و منه متوازيان. نصف قطر الدائرة : $AC=3$ و منه : $R=\sqrt{r^2-AC^2}=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$	0.5 0.5 0.25
ب) نثبت أن $B\in(S)$ و أن $\overrightarrow{BC}\perp\vec{v}$ ، نعوض بإحداثيات B في معادلة (S) : $(x+1)^2+y^2+(z+1)^2=6^2$ نجد : $(3+1)^2+2^2+(3+1)^2=16+4+16=36=6^2$ و لدينا : $\overrightarrow{BC}(4,2,4)$ و $\vec{v}(1,2,-2)$ ، و منه : $\overrightarrow{BC}\bullet\vec{v}=1\times4+2\times2+(-2)\times4=0$	0.5
1- أ) $AB=\sqrt{(3-(-3))^2+(2-(-1))^2+(3-(-3))^2}=9$ الاستنتاج : $C\in[AB]$ يعني أن : $AC+CB=AB$ لدينا : $AC=3$ و $AB=9$ و $B\in(S)$ إذن : $CB=6$ و منه : $AC+CB=AB$	0.25 0.5
ب) بما أن : $C\in[AB]$ إذن : $(AB)=(AC)=(BC)$	

(d) مماس لسطح الكرة (S) عند B إذن : $(d)\perp(BC)$ ، و (S) و (P) يتقاطعان وفق دائرة مركزها A إذن $(P)\perp(AC)$ و بما أن (Δ) محتوى في (P) إذن $(\Delta)\perp(AC)$
و منه المستقيم (AB) يعامد كل من (Δ) و (d). **0.75**

التمرين الرابع

I- 1- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}\right]=+\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=+\infty$ **01**

$g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$ إشارته من إشارة : $x-1$ و منه :

x	0 1 $+\infty$
$g'(x)$	$-$ 0 $+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↗ $+\infty$

و منه : g متزايدة على المجال $[1,+\infty[$ ، و متناقصة على المجال $]0,1]$

2- من جدول التغيرات نستنتج من أجل كل $x>0$ لدينا : $g(x)\geq 0$ **0.5**

3- أ) $h(x)=x+(x-2)\ln x=x+[(x-1)-1]\ln x=x+(x-1)\ln x-\ln x$ **0.25**

$=1+g(x)+(x-1)\ln x=1-1+x+(x-1)\ln x-\ln x$

ب) لدينا : **0.25**

x	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$
$\ln x$	$-$	0	$+$
$(x-1)\ln x$	$+$	0	$+$

و منه : $(x-1)\ln x>0$

بما أن : $(x-1)\ln x>0$ و $g(x)>0$ ، و منه : $h(x)>0$.

II- 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^2\left[\frac{1}{(\ln x)^2}-\frac{x}{\ln x}-1\right]=+\infty$ **0.25**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty$ و منه يوجد مستقيم مقارب معادلته : $x=0$. **0.5**

2- $f'(x)=\ln x+1-2\times\frac{1}{x}\ln x=\frac{x\ln x+x-2\ln x}{x}$ **0.75**

و منه : $=\frac{x+(x-2)\ln x}{x}=\frac{h(x)}{x}$

اذن الدالة متزايدة على المجال $]0,+\infty[$

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

3- أ) $y=f'(1)(x-1)+f(1)=(1)(x-1)+1$ ، و منه : $(\Delta):y=x$ **0.25**

ب) $(-1+\ln x)\times g(x)=(-1+\ln x)(x-1-\ln x)$ **0.5**

<table>
<tr><td>

$=-x+1+\ln x+x\ln x-\ln x-(\ln x)^2$

و منه : $(-1+\ln x)\times g(x)=f(x)-x$

<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td></td><td>1</td><td></td><td>e</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)-x$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
</table>

</td><td></td></tr>
<tr><td>

جـ) لدينا : $g(x)\geq 0$ ، و منه ندرس إشارة : $-1+\ln x$

$-1+\ln x=0$ و منه : $x=e$

و منه الوضعية : C_f تحت (Δ) على $]0,1[$ و على $]1,e[$ و C_f فوق (Δ) على $]e,+\infty[$

A ليست نقطة انعطاف لأن المماس عند A لا يخترق المنحنى.

</td><td>0.5

0.25</td></tr>
<tr><td>-4</td><td>01</td></tr>
<tr><td>

5- أ) $F'(x)=(x+2)\ln x+\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)-\frac{x}{2}-1-\left[(\ln x)^2+2\ln x\right]$

$=x\ln x+2\ln x+\frac{x}{2}+2-\frac{x}{2}-1-(\ln x)^2-2\ln x\ =1+x\ln x-(\ln x)^2=f(x)$

</td><td>0.25</td></tr>
<tr><td>

ب) $\int_1^e(x-f(x))dx=\int_1^e xdx-\int_1^e f(x)dx$

$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e-\left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-x-x(\ln x)^2\right]_1^e$

$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}-\left[\frac{e^2}{2}+2e-\frac{e^2}{4}-e-e\right]+\left[-\frac{1}{4}-1\right]=\frac{e^2}{4}-\frac{7}{4}$

التفسير: هي مساحة الحيز المحدد بـ : C_f و (Δ) و بالمستقيمات : $y=0$ و $x=1$ و $x=e$.

</td><td>0.5

0.25</td></tr>
</table>

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية ميلة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2015

الشعبة : رياضيات — مقاطعة : ميلة 1

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 4 ساعات و نصف

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

☜ الموضوع الأول

✓**التمرين الأول:**(03.5 نقاط)

1) جد جميع الثنائيات المرتبة (x,y) من الأعداد الطبيعية حيث: $x^3 - y^3 = 631$

2) ا- ماهو باقي القسمة الإقليدية للعدد 111 على 7 .

ب- عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 10^n على 7

3) α عدد طبيعي يكتب في النظام العشري كمايلي : $\alpha = \overline{999888777666555444333222111}$

ا- بيّن أنّ α يكتب بدلالة العدد 111.

ب- ما هو باقي قسمة العدد α على 7.

✓**التمرين الثاني:** (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

نعتبر النقطة $A(-1;1;0)$ والمستوى (P) ذو المعادلة $x-2y+2z-6=0$.

والمستقيم (D) حيث : $\begin{cases} x = 2t-3 \\ y = 3t-2 \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 2t-2 \end{cases}$ تمثيل وسيطي له.

1) أ- أحسب المسافة بين النقطة A والمستوى (P) و استنتج أن A لا تنتمي إلى (P).

ب- أثبت أن المستقيم (D) يشمل النقطة A و يوازي المستوى (P).

2) أ- جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) ؛ الذي يشمل النقطة A و يعامد المستوى (P) .

ب- عين إحداثيات B نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوى (P) .

جـ- عين تمثيلا وسيطي للمستقيم (Δ_0) الذي يشمل النقطة B ويوازي (D) .

ثم اثبت أنّ (Δ_0) محتوى في المستوى (P) .

3) تعطى النقطة $C(2;-1;2)$.أحسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D).

✓ **التمرين الثالث : (06 نقاط)**

في كل يلي المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$

نعتبر النقط A_2,A_1,A_0 لواحقها على الترتيب: z_2,z_1,z_0 حيث $z_2=-4-i, z_1=-1-4i, z_0=5-4i$.

1) ا- بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث: $S\left(A_0\right)=A_1$ و $S\left(A_1\right)=A_2$.

ب- اثبت أنّ العبارة المركبة للتّشابه S هي: $z'=\left(\dfrac{1-i}{2}\right)z+\dfrac{-3+i}{2}$.

ج- استنتج النّسبة والزاوية واللاحقة ω للمركز Ω للتشابه S .

د- نعتبر النقطة M لاحقتها z حيث $z\neq\omega$ و صورتها $M'\left(z'\right)$ بواسطة S .

تحقق من أنّ $\omega-z'=i\left(z-z'\right)$.واستنتج طبيعة المثلث $\Omega MM'$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n . نعرف متتالية النقط $\left(A_n\right)$ كما يلي: $A_{n+1}=S\left(A_n\right)$ و نضع $v_n=A_nA_{n+1}$

ا) مثل النقط A_2,A_1,A_0 وأنشئ هندسيا النقط A_6,A_5,A_4,A_3 .

ب) برهن أنّ المتتالية $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.عيّن حدها الأوّل v_0

3) المتتالية $\left(U_n\right)$ معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n=v_0+v_1+...+v_n$.

ا) عبر عن v_n بدلالة n .

ب) هل المتتالية $\left(U_n\right)$ متقاربة؟

4) احسب بدلالة n الطول ℓ_n حيث: $\ell_n=\Omega A_n$ ثمّ عيّن أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\ell_n \langle 0.06$.

✓ **التمرين الرابع : (06.5 نقاط)**

الدالتان العدديتان f و g معرفتان على المجال $]0;+\infty[$ كمايلي:

$$f(x)=2x+1+\frac{1-\ln x}{x} \quad \text{و} \quad g(x)=2x^2-2+\ln x$$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1) أ) أثبت أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب) أحسب $g(1)$ ثم استنتج ،حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

2) أ) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$. ثم فسّر هندسيا النتيجة .

ب) أثبت أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x+1$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

جـ) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) أثبت أنه ، من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ،فإن : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

4) أنشئ كلا من (Δ) و (C_f) .

5) نضع ،من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}(f(x)-(2x+1))dx$

أ) أحسب U_n ، بدلالة n، ثم استنتج طبيعة المتتالية (U_n) .

ب) لتكن A مساحة حيز المستوى ؛المحدد بالمنحنى (C_f) وبالمستقيم (Δ) وبالمستقيمين الذين معادلتان لهما: $x=1$, $x=e^2$. تحقق من أن : $A=\left(U_0-U_1\right)\ ua$

6) نعتبر الدالة h،المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ ، بالعلاقة : $h(x)=x^2(1+\ln x)-3x+2$

أ) أثبت أنه ،من أجل كل x من $]0;+\infty[$، فإن : $\frac{h(x)}{x}=f\left(\frac{1}{x}\right)-4$. ثم استنتج أن $h(x)\geq 0$

ب) عين xبحيث يكون $h(x)=0$.

☜الموضوع الثاني

✓**التمرين الأول**:(**03.5 نقاط**)

1- حل ،في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $(z-2)(z^2-2z+4)=0$.

2- المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$

لتكن النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب، z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A=2$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $\mathbf{z}_c=1-i\sqrt{3}$

أ – اكتب شكلا أسيا لكل من z_B و z_C .

ب- أكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015}$.

ج-عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $z_B{}^n$ عددا حقيقيا سالبا .

3- أ- اكتب على الشكل الأسي العدد $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

ب- استنتج أن C هي صورة B بتحويل نقطي ، يطلب تعيينه بدقة ثمّ عيّن عناصره المميزة .

4- حدد مع التعليل طبيعة الرباعي $OBAC$.

✓**التمرين الثاني**:(**03.5 نقطة**)

1) حلل العدد 320 إلى جداء عوامله الأوّلية ثمّ عيّن مجموعة قواسمه الطبيعية.

2) x و y عددان طبيعيان أوّليان فيما بينهما. اثبت أنّ xy و $(x+y)$ أوّليان فيما بينهما.

3) a و b عددان طبيعيان غير معدومين بحيث: $7(a+b)^2=320m$ حيث $m=PPCM(a;b)$

عيّن القيم الممكنة لكلّ من العددين a و b.

✓**التمرين الثالث**: (**06 نقاط**)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

نعتبر النقطتين $A(2;1;1)$, $I(3;-1;0)$ و (P) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق:

$$MA^2-\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MI}=0$$

1) بيّن أنّ النقطة A تنتمي إلى المجموعة (P) وأنّ (P) هي المستوي ذو المعادلة: $x-2y-z+1=0$.

2) جد معادلة لسطح الكرة (S) ذات المركز I وتشمل النقطة A .

3) ليكن المستوي (P') المعرف بالمعادلة: $2x-y+z-4=0$.

أ) بيّن أنّ (P') يقطع (S) وفق دائرة (C) يطلب تعيين مركزها H ونصف قطرها r .

ب) لتكن النقطة $B(2;-2;-2)$, تحقق من أنّ AB هو أحد أقطار الدائرة (C).

ت) جد معادلة ديكارتيه للمستوي (Q) المماس لسطح الكرة (S) في النقطة B .

4) عيّن المجموعة (Σ) للنقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث:
$(x-2y-z+1)^2+(2x-y+z-4)^2=0$.

✓ التمرين الرابع : (07 نقاط)

المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x-1)e^x+1$

1) ادرس تغيرات g .

2) عين ،تبعا لقيم x ، إشارة $g(x)$ واستنتج أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، فإن : $xe^x+1>0$

3) تحقق أنه ،من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $g(x)-g'(x)=1-e^x$ (g' هي الدالة المشتقة للدالة g)

استنتج $\int_0^1 g(x)dx$ وفسره هندسيا.

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{xe^x}{xe^x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وفسر هندسيا النتيجتين.

2) بين أنه ،من أجل كل عدد حقيقي x ، فإن $f'(x)=\dfrac{(x+1)e^x}{(xe^x+1)^2}$ واستنتج جدول تغيرات f

3) بين أن $y=x$ هي معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في المبدأ.

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x)-x=\dfrac{-x.g(x)}{xe^x+1}$ واستنتج وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (T)

5) ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f)

III. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+1}=f(u_n)$

1) برهن بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ،فإن: $u_n>0$

2) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها.

متقن الشهيد سرار عبد الحميد - زغاية

تصحيح البكالوريا التجريبي — الشعبة : رياضيات — الأستاذ : ش- أ

الإجابة	العلامة

الموضوع الأول

التمرين الأول

❶ إيجاد جميع الثنائيات المرتبة (x,y) من الاعداد الطبيعية والتي تحقق المعادلة $x^3-y^3=631.......(E)$

بالقسمة الإقليدية للعدد x^3-y^3 على $x-y$ نجد : $x^3-y^3=(x-y).(x^2+y^2+xy)$

المعادلة (E) تصبح $(x-y).(x^2+y^2+xy)=631$

بما أن 631 عدد أولي أي 1 . 631 =631 فإن $\begin{cases}(x-y)=1\\(x^2+y^2+xy)=631\end{cases}$ لأن $(x^2+y^2+xy)\succ(x-y)$

و x , y عددان طبيعيان .

إذن $y=x-1$ وبالتعويض في المعادلة الثانية من الجملة نجد $x^2-x-210=0$ ولدينا $\Delta=841$ ومنه $\sqrt{\Delta}=29$

لدينا إذن $x_1=\frac{1-29}{2}=-14$ (حل مرفوض) و $x_2=\frac{1+29}{2}=15$ بالتعويض نجد $y=14$

ومنه توجد ثنائية وحيدة هي حلول المعادلة ومنه $S=\{(15,14)\}$

❷ أ / إيجاد باقي قسمة 111 على 7 : 111=15.7+6 ومنه : $111\equiv6[7]$

ب / تعيين حسب قيم n بواقي قسمة 10^n

$10^0\equiv1[7]$, $10^1\equiv3[7]$, $10^2\equiv2[7]$, $10^3\equiv6[7]$, $10^4\equiv4[7]$, $10^5\equiv5[7]$, $10^6\equiv1[7]$

ومنه جدول البواقي كما يلي

قيم n	6k	6k+1	6k+2	6k+3	6k+4	6k+5
البواقي	1	3	2	6	4	5

❸ α عدد طبيعي يكتب في النظام العشري كما يلي $\alpha=999888777666555444333222111$

أ- كتابة α بدلالة العدد 111 :

بقسمة العدد α على 111 نجد : $\alpha=111.(9008007006005004003002001)$

ب – باقي قسمة α على 111 : باستعمال السؤال ❷ أ / و ❷ب/ لدينا

$111.(9008007006005004003002001)\equiv6.(1.10^0+2.10^3+3.10^6+4.10^9+5.10^{12}+6.10^{15}+7.10^{18}+8.10^{21}+9.10^{24})$

ومنه $\alpha\equiv111.(9008007006005004003002001)\equiv6.(1.+2.6+3.1+4.6+5.1+6.6+7.1+8.6+9.1)$

لدينا إذن $\alpha\equiv870[7]$ لكن $870\equiv2[7]$ ومنه لدينا $\alpha\equiv2[7]$

التمرين الثاني

لدينا $A(-1,1,0)$, $(p):x-2y+2z-6=0$ و $(D):\begin{cases}x=2t-3\\y=3t-2\\z=2t-2\end{cases}$

❶ أ – المسافة بين A و (p) هي : $d(A,p)=\frac{|-1-2.(1)+2.(0)-6|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(2)^2}}\frac{9}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3$

$d(A,p)=3\succ0$ ومنه $A\notin(p)$

ب – إثبات أن (D) يشمل A ويوازي (p) : لدينا $\begin{cases}-1=2t-3\\1=3t-2\\0=2t-2\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}t=1\\t=1\\t=1\end{cases}$ أي $A\in(D)$ • اثبات أن $(D)//(p)$: $\vec{u}(2,3,2)$ شعاع توجيه ل (D) , $\vec{n}(1,-2,2)$ شعاع ناظمي ل (p) ولدينا $\vec{u}.\vec{n}=2.1+3.(-2)+2.3=0$ ومنه $\vec{u}$ و $\vec{n}$ متعامدان ومنه $(D)//(p)$.	
❷ **أ – تمثيل وسيطي ل (Δ) الذي يشمل A ويعامد (p) :** (Δ) يعامد (p) ومنه $\vec{n}(1,-2,2)$ هو شعاع توجيه ل (Δ) ومنه : $(\Delta):\begin{cases}x=t'-1\\y=-2t'+1\\z=2t'\end{cases}$ **ب/ إحداثيات B نقطة تقاطع (Δ) و (p) :** $\begin{cases}x=t'-1\\y=-2t'+1\\z=2t'\\x-2y+2z-6=0\end{cases}$ ومنه لدينا : $(t'-1)-2(-2t'+1)+2(2t')-6=0$ ومنه $t'=1$ بالتعويض بقيمة t' في الجملة نجد $\begin{cases}x=0\\y=-1\\z=2\end{cases}$ أي $B(0,-1,2)$ نقطة تقاطع (Δ) و (p). **ج – تمثيل وسيطي ل (Δ_0) الذي يشمل B ويوازي (D) :** $(\Delta_0)//(D)$ ومنه شعاع توجيه (D) **هو شعاع توجيه ل** (Δ_0) أي $\vec{u}(2,3,2)$ شعاع توجيه ل (Δ_0) . ومنه $(\Delta_0):\begin{cases}x=2t\\y=3t-1\\z=2t+2\end{cases}$. • **إثبات أن** $(\Delta_0)\subset(p)$ **:** يكفي إيجاد نقطتين من (Δ_0) **تنتميان إلى** (p) لدينا $B(0,-1,2)$ تنتمي إلى (Δ_0) و $B(0,-1,2)$ تحقق معادلة (p) فهي تنتمي إلى (p) . بوضع $t=1$ في التمثيل الوسيطي ل (Δ_0) **نجد نقطة أخرى** $B(2,2,4)$ من (Δ_0) وتحقق معادلة (p) أيضا . بما أنه توجد نقطتان من المستقيم (Δ_0) **تنتميان إلى** (p) فإن $(\Delta_0)\subset(p)$	
❸ **حساب المسافة بين النقطة $C(2-1,2)$ والمستقيم (D):** المسافة بين النقطة $C(2,-1,2)$ والمستقيم (D) هي الطول CH حيث H هي المسقط العمودي ل C على (D) يكفي إيجاد إحداثيات النقطة H ثم حساب $\left\|\overrightarrow{CH}\right\|$. H تنتمي إلى (D) ومنه فإن $\begin{cases}x_H=2t-3\\y_H=3t-2\\z_H=2t-2\end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}x_H-x_C\\y_H-y_C\\z_H-z_C\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{CH}\begin{pmatrix}2t-5\\3t-1\\2t-4\end{pmatrix}$ وشعاع توجيه (D) هو $\vec{u}(2,3,2)$ و $\overrightarrow{CH}.\vec{u}=0$ وهذا يعني أن $2.(2t-5)+3.(3t-1)+2.(2t-4)=0$	

ومنه $t=\frac{21}{17}$ وبالتعويض بقيمة t نجد $\begin{cases} x_H=\frac{-9}{17} \\ y_H=\frac{29}{17} \\ z_H=\frac{8}{17} \end{cases}$ ومنه $CH=\sqrt{\left(-\frac{9}{17}-2\right)^2+\left(\frac{29}{17}+1\right)^2+\left(\frac{8}{17}-2\right)^2}$

التمرين الثالث

لدينا النقط A_2,A_1,A_0 لواحقها على الترتيب: z_2,z_1,z_0 حيث $z_0=5-4i, z_1=-1-4i, z_2=-4-i$.

❶ ا- بيّن أنّه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث: $S(A_0)=A_1$ و $S(A_1)=A_2$:

بما أن $A_0\neq A_1$ و $A_1\neq A_2$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد يحول A_0 إلى A_1 ويحول A_1 إلى A_2

ب – اثبات أنّ العبارة المركبة للتّشابه S هي: $z'=\left(\frac{1-i}{2}\right)z+\frac{-3+i}{2}$:

لدينا $\begin{cases} S(A_0)=A_1 \\ S(A_1)=A_2 \end{cases}$ معناه $\begin{cases} z_1=az_0+b....(1) \\ z_2=az_1+b....(2) \end{cases}$ وبطرح العبارتين نجد $z_2-z_1=a(z_1-z_0)$ ومنه

$a=\frac{z_2-z_1}{z_1-z_0}=\frac{1-i}{2}$ بالتعويض بقيمة a في المعادلة (1) أو (2) نجد $b=\frac{-3+i}{2}$

ومنه العبارة المركبة للتّشابه S هي: $z'=\left(\frac{1-i}{2}\right)z+\frac{-3+i}{2}$

ج – استنتاج النسبة والزاوية واللاحقة ω للمركز Ω للتشابه S :

- نسبة التشابه هي $|a|=\left|\frac{1-i}{2}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
- زاوية التشابه S هي $\arg(a)=\arg\left(\frac{1-i}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$
- لاحقة المركز Ω هو w حيث $\frac{-3+i}{1+i}=\frac{\frac{-3+i}{2}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{b}{1-a}=w$ وبالضرب في مرافق المقام نجد

$w=-1+2i$

د - النقطة M لاحقتها z حيث $z\neq\omega$ وصورتها $M'(z')$ بواسطة S

- التحقق أن $\omega-z'=i(z-z')$. واستنتاج طبيعة المثلث $\Omega MM'$

$$\frac{w-z'}{z-z'}=\frac{-1+2i-\left(\frac{1-i}{2}\right)z-\frac{-3+i}{2}}{z-\left(\frac{1-i}{2}\right)z-\frac{-3+i}{2}}=i$$

- لدينا $\left|\frac{w-z'}{z-z'}\right|=|i|=1$ معناه المثلث $\Omega MM'$ متساوي الساقين .... (1)

لدينا أيظا $\arg\left(\frac{w-z'}{z-z'}\right)=\arg(i)=\frac{\pi}{2}$ معناه المثلث $\Omega MM'$ قائم في M' ......(2) (لاحقة M' موجودة في البسط والمقام).

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث $\Omega MM'$ متساوي الساقين و قائم في M' .

❷ من أجل كل عدد طبيعي n , نعرف متتالية النقط (A_n) كما يلي: $A_{n+1}=S(A_n)$ و نضع $v_n=A_nA_{n+1}$

ا) **تمثيل النقط** A_2,A_1,A_0 **وانشاء هندسيا النقط** A_6,A_5,A_4,A_3 .

- لدينا $A_0(5,-4)$, $A_1(-1,-4)$, $A_2(-4,-1)$
- من جهة أخرى لدينا $A_{n+1}=S(A_n)$ معناه $S(A_0)=A_1$, $S(A_1)=A_2$, $S(A_2)=A_3$ ....الخ

ومنه نستنتج أن $(S\circ S)(A_0)=A_2$, $(S\circ S)(A_1)=A_3$ و $(S\circ S)(A_2)=A_4$........الخ

أي التشابه $S\circ S$ يحول A_0 إلى A_2 و يحول A_1 إلى A_3 ويحول A_2 إلى A_4 ...الخ

حيث $S\circ S$ هو مركب تشابهين نسبته جداء النسبتين وزاويته هي مجموع الزاويتين .

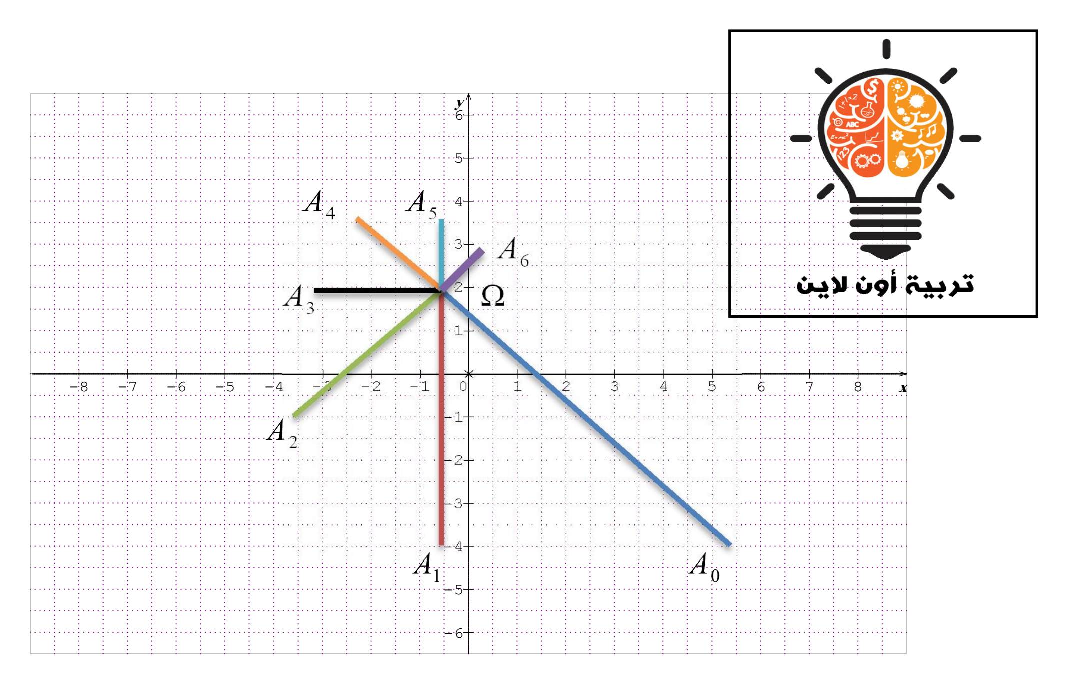
بما ان نسبة التشابه S هي $\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن نسبة التشابه $S\circ S$ هي $\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}$

بما ان زاوية التشابه S هي $-\frac{\pi}{4}$ فإن زاوية التشابه $S\circ S$ هي $\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$

لدينا مثلا : $\Omega A_2=\frac{1}{2}\Omega A_0$ و $\left(\overrightarrow{\Omega A_0},\overrightarrow{\Omega A_2}\right)=-\frac{\pi}{2}$ لأن A_2 صورة A_0 بالتشابه $S\circ S$

$\Omega A_3=\frac{1}{2}\Omega A_1$ و $\left(\overrightarrow{\Omega A_1},\overrightarrow{\Omega A_3}\right)=-\frac{\pi}{2}$ لأن A_3 صورة A_1 بالتشابه $S\circ S$ .... الخ

الإنشاء :



ب) **اثبات أنّ المتتالية** (v_n) **هندسية أساسها** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **.وتعيين حدها الأوّل** v_0

لدينا $v_n=A_nA_{n+1}$, ومنه $v_{n+1}=A_{n+1}A_{n+2}$ ومنه $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{A_{n+1}A_{n+2}}{A_nA_{n+1}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}A_nA_{n+1}}{A_nA_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

لأن $\begin{cases}S(A_n)=A_{n+1}\\S(A_{n+1})=A_{n+2}\end{cases}$ أي $A_{n+1}A_{n+2}=\frac{\sqrt{2}}{2}A_nA_{n+1}$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$ وحدها الأول $v_0=A_0A_1=\sqrt{(-1-5)^2+(-4+4)^2}=6$

❸ المتتالية (U_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_n=v_0+v_1+...+v_n$

ا) التعبير عن v_n بدلالة n: $v_n = v_0 q^n$ ومنه $v_n = 6.\dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ أي $v_n = 12.\dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{2-\sqrt{2}}$ ب) بما أن $-1 \prec q = \frac{\sqrt{2}}{2} \prec 1$ فإن (v_n) متقاربة وبما أن U_n هي مجموع حدود متتابعة لحدود (v_n) المتقاربة فإن (U_n) متقاربة.	
❹حساب بدلالة n الطول ℓ_n حيث: $\ell_n = \Omega A_n$ ثمّ تعيين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\ell_n \langle 0.06$ لدينا $\ell_n = \Omega A_n$ و $\ell_{n+1} = \Omega A_{n+1}$ ومنه لدينا $\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \frac{\Omega A_{n+1}}{\Omega A_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\Omega A_n}{\Omega A_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أي (ℓ_n) متتالية هندسية أساسها $q' = \frac{\sqrt{2}}{2}$ وحدها العام هو $\ell_n = \ell_0.(q')^n$ أي $\ell_n = \Omega A_0.(q')^n$ وبالتالي $\ell_n = \sqrt{(5+1)^2 + (-4-2)^2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ ومنه $\ell_n = 6\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ • أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $\ell_n \langle 0.06$: $\ell_n \langle 0.06$ معناه $6\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \prec 0,06$ ومنه $\ln 6\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \prec \ln(0,06)$ ومنه $\ln 6\sqrt{2} + n \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \prec -2\ln 6$ وبالتالي $n \prec \dfrac{-2\ln 6 - \ln 6\sqrt{2}}{\ln\sqrt{2} - \ln 2}$	
التمرين الرابع	
f و g معرفتان على المجال $]0;+\infty[$ ب : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{1-\ln x}{x}$ و $g(x) = 2x^2 - 2 + \ln x$ ❶ أ) اثبات أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$: الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا : $g'(x) = 4x + \frac{1}{x} = \frac{4x^2+1}{x}$ وبما أن $x \in]0,+\infty[$ فإن g متزايدة تماما على $]0;+\infty[$. ب) $g(1) = 0$ ومنه اشارة g تكون كما يلي : x: 0 … 1 … $+\infty$ $g(x)$: - 0 +	
❷ أ) حساب $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. وتفسير النتيجة هندسيا : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left[(2x+1) + \dfrac{1-\ln x}{x}\right] = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+}(2x+1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right) = \lim\limits_{y \to +\infty}\left(y - y\ln\dfrac{1}{y}\right) = \lim\limits_{y \to +\infty}(y + y\ln y) = +\infty \end{cases}$	

- التفسير الهندسي : $x=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) اثبات أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x+1$ هو مقارب مائل للمنحنى (C_f):

$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+1)]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)=0$ ومنه (Δ) ذي المعادلة $y=2x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ج) وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) : ندرس اشارة الفرق $f(x)-(2x+1)$

لدينا $f(x)-(2x+1)=\frac{1-\ln x}{x}$ ومنه $\frac{1-\ln x}{x}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e$ ومنه $x=e$

ومنه وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ملخصة في الجدول كما يلي :

x	0	e	$+\infty$
الوضعية	(C_f) يقع فوق (Δ)	0	(C_f) يقع تحت (Δ)

❸ اثبات أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن، : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x)=2+\frac{-2\ln x}{x^2}=\frac{2x^2-2+\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2}$$

- إشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$ وجدول تغيرات f يكون كما يلي

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	4	↗ $+\infty$

❹ انشاء كلا من (Δ) و (C_f):

❺ من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}(f(x)-(2x+1))dx$

ا) حساب U_n ، بدلالة n، ثم استنتاج طبيعة المتتالية (U_n) :

$$\int_{e^n}^{e^{n+1}}[f(x)-2x+1]dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{1-\ln x}{x}dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{1}{x}dx-\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{\ln}{x}dx$$

$$=[\ln x]_{e^n}^{e^{n+1}}-\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_{e^n}^{e^{n+1}}=[(n+1)\ln e-n\ln e]-\left[\frac{((n+1)\ln e)^2}{2}-\frac{(n\ln e)^2}{2}\right]$$

$=[n+1-n]-\left[\frac{(n+1)^2}{2}-\frac{n^2}{2}\right]=1-\left[\frac{n^2+2n+1-n^2}{2}\right]=1-\frac{2n-1}{2}=-n+\frac{1}{2}$ وبالتالي $U_n=\int_{e^n}^{e^{n+1}}[f(x)-2x+1]dx=-n+\frac{1}{2}$ ومنه (U_n) حسابية أساسها $r=-1$ وحدها الاول $U_0=\frac{1}{2}$. **ب)** A مساحة حيز المستوى المحدد بالمنحنى؛ (C_f) وبالمستقيم (Δ) وبالمستقيمين الذين معادلتان لهما: $x=1$, $x=e^2$. التحقق من أن : $A=(U_0-U_1)\ ua$ $U_0-U_1=\left[\int_1^e[f(x)-2x+1]dx\right]-\left[\int_e^{e^2}[f(x)-2x+1]dx\right]=\int_1^{e^2}[f(x)-2x+1]dx=A$ (باستعمال علاقةشال)	
❻ الدالة h ،معرفة على المجال $]0;+\infty[$ ، بالعلاقة : $h(x)=x^2(1+\ln x)-3x+2$ **أ) اثبات أنه، من أجل كل** x **من** $]0;+\infty[$ ، **فإن :** $\frac{h(x)}{x}=f(\frac{1}{x})-4$ **.ثم استنتاج أن** $h(x)\geq 0$ $f\left(\frac{1}{x}\right)-4=2.\frac{1}{x}+1+\frac{1-\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-4=\frac{x+2}{x}+x+x\ln x-4$ $=\frac{x+2+x^2+x^2\ln x-4x}{x}=\frac{x^2(1+\ln x)-3x+2}{x}=\frac{h(x)}{x}$ • لدينا من جدول تغيرات f $f(x)\geq 4$ تكافيء $f(x)\geq f(1)$ ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right)\geq 4$ أي $f\left(\frac{1}{x}\right)-4\geq 0$ ومنه $\frac{h(x)}{x}\geq 0$ وبالتالي $h(x)\geq 0$ **ب) تعيين** x **بحيث يكون** $h(x)=0$ $h(x)=0$ تكافيء $f\left(\frac{1}{x}\right)-4=0$ تكافيء $f\left(\frac{1}{x}\right)=4$ ومنه $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)$ ومنه $\frac{1}{x}=1$ وبالتالي $x=1$	

انتهى تصحيح الموضوع الأول

متقن الشهيد سرار عبد الحميد - زغاية

تصحيح البكالوريا التجريبي دورة ماي 2015 الشعبة : رياضيات

إعداد : شايبي أمين

الإجابة	العلامة

الموضوع الثاني

التمرين الأول

❶ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة : $(z-2)(z^2-2z+4)=0.........(E)$:

لدينا $(z-2)(z^2-2z+4)=0$ تكافيء $\begin{cases} z=2................(1) \\ z^2-2z+4=0.......(2) \end{cases}$

- حل المعادلة (2) : لدينا $\Delta'=b'^2-ac=(-1)^2-1.4=-3=i^2.3$ ومنه $\sqrt{\Delta'}=i\sqrt{3}$

ومنه نجد $z_1=\dfrac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1}=1-i\sqrt{3}$ ، $z_2=\dfrac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1}=1+i\sqrt{3}$

ومنه المعادلة (E) لها ثلاثة حلول في $\mathbb{C}$ و هي : $z_C=1-i\sqrt{3}, z_B=1+i\sqrt{3}, z_A=2$

❷ أ) كتابة شكلا أسيا لكل من z_B و z_C :

* $|z_B|=|1+i\sqrt{3}|=\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$ ، $\arg z_B=\arg(1+i\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $z_B=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

* $|z_C|=|1-i\sqrt{3}|=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$ ، $\arg z_C=\arg(1-i\sqrt{3})=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ومنه $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ب) الشكل الجبري للعدد $\left(\dfrac{z_C}{2}\right)^{2015}$:

$$\left(\frac{z_C}{2}\right)^{2015}=\left(\frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2}\right)^{2015}=\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{2015}=\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^{2015}=\cos\left(\frac{-2015\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-2015\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi-2016\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi-2016\pi}{3}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi.(-336)\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi.(-336)\right)$$

وبالتالي $\left(\dfrac{z_C}{2}\right)^{2015}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ج) قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $z_B{}^n$ عددا حقيقيا سالبا :

$(z_B)^n$ حقيقي سالب معناه $\arg(z_B)^n=k\pi$

$$\arg(z_B)^n=\arg\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=\arg\left(2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}\right)=\frac{n\pi}{3}$$

ومنه $\arg(z_B)^n=k\pi$ معناه أن $\dfrac{n\pi}{3}=k\pi$ وبالتالي $n=3k \;/\; k\in\mathbb{N}$

❸ أ– كتابة على الشكل الأسي العدد $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$:

$$\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1-i\sqrt{3}-2}{1+i\sqrt{3}-2}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=-\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=-\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{4}=-\frac{\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2}{4}=-\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2=e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

وبالتالي $\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{5\pi}{3}}$

ب - استنتاج أن C هي صورة B بتحويل نقطي :

لدينا $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \left|e^{i\frac{5\pi}{3}}\right| = 1$ ولدينا $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{5\pi}{3}[2\pi]$ ومنه C هي صورة B بالدوران الذي مركزه A ذات اللاحقة $z_A = 2$ وزاويته $\frac{5\pi}{3}$.

❹ تحديد مع التعليل طبيعة الرباعي $OBAC$:

لدينا $AC = AB$, $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = \frac{5\pi}{3}$ و لدينا أيظا B و C متناظرتان بالنسبة لمحور الفواصل ومنه الرباعي $OBAC$ **معين** .

التمرين الثاني



❶ تحليل العدد 320 إلى جداء عوامله الأوّلية ثمّ تعيين مجموعة قواسمه الطبيعية :

$320 = 32.10 = 2^6.5$ ومجموعة قواسمه هي : $320, 16, 80, 64, 40, 32, 20, 16, 10, 8, 5, 4, 2, 1$

.

❷ x و y عددان طبيعيان أوّليان فيما بينهما. اثبات أنّ xy و $(x+y)$ أوّليان فيما بينهما:

لدينا $p\gcd(x, y) = 1$ ونبرهن أن $p\gcd(xy, x+y) = 1$

نضع $p\gcd(xy, x+y) = d$

لدينا إذن : $d / x+y$ و d / xy ومنه فإن d سيقسم كل مزج خطي بينهما ومنه $d / x(x+y)$ و d / xy

وبالتالي $d / x(x+y) - xy$ أي d / x^2 .....(1) .

من جهة أخرى $d / y(x+y)$ و d / xy ومنه $d / y(x+y) - xy$ وبالتالي d / y^2 ....(2)

من (1) و(2) لدينا d يقسم $p\gcd(x^2, y^2)$ ولكن $p\gcd(x^2, y^2) = 1$ لأن $p\gcd(x, y) = 1$ ومنه $d = 1$

❸ a و b عددان طبيعيان غير معدومين بحيث: $7(a+b)^2 = 320m$ حيث $m = PPCM(a;b)$

- **تعيين كل القيم الممكنة لكلّ من العددين a و b:**

لدينا $p\gcd(a,b) = d$ وبوضع $a = a'd$, $b = b'd$ حيث $p\gcd(a', b') = 1$.

بالتعويض في العبارة $ab = md$ نجد $a'd\,b'd = md$ أي $a'b'd^2 = md$ ومنه $a'b'd = m$

وبالتعويض بقيمة m في العبارة $7(a+b)^2 = 320m$ نجد $7d(a'+b')^2 = 320a'b'$

$(a'+b')^2$ يقسم $320a'b'$ وبما أن $(a'+b')^2$ و $a'b'$ أوليان فيما بينهما فإنه حسب غوص $(a'+b')^2$ يقسم 320

ومنه $(a'+b')^2 \in \{1, 4, 16, 64\}$ وبالتالي $(a'+b') \in \{1, 2, 4, 8\}$

ومنه $(a', b') \in \{(1,3), (1,7), (7,1)\}$

وبالتالي $(a, b) \in \{(7,1), (1,7)\}$.

انتهى تصحيح الموضوع الثاني